

Zur Quantenelektrodynamik ladungsfreier Felder.

Von P. Jordan in Göttingen und W. Pauli jr. in Hamburg.

(Eingegangen am 7. Dezember 1927.)

In Weiterführung der Diracschen Theorie, bei der die elektrodynamischen Feldgrößen als nicht vertauschbare Zahlen (q -Zahlen) angesehen werden, werden hier, wenigstens im Spezialfall des Fehlens von geladenen Teilchen (reines Strahlungsfeld), Vertauschungsrelationen zwischen den Feldgrößen aufgestellt, die eine relativistisch invariante Form haben. Es wird gezeigt, daß diese Relationen auch ohne Benutzung der Fourierzerlegung des Feldes formuliert werden können. Ferner wird eine allgemeine mathematische Methode angegeben, die gestattet, Relationen zwischen q -Zahlen, die von Raum- und Zeitkoordinaten stetig abhängen (q -Funktionen), umzudeuten in Relationen zwischen geeignet gewählten Operatoren, die auf verallgemeinerte, vom ganzen Feldverlauf abhängige ψ -Funktionen (Funktionale) anzuwenden sind.

Bekanntlich ist es Dirac* zuerst gelungen, die quantenmechanischen Methoden auch auf die Behandlung des elektromagnetischen Feldes selbst zu übertragen, indem er die Amplituden der Partialwellen des Feldes als „ q -Zahlen“ auffaßt und Vertauschungsrelationen für diese aufstellt. Daß auf diesem Wege wesentliche Fortschritte zu erzielen seien, mußte gewiß erscheinen, nachdem eine analoge Behandlung eines einfacheren Problems, der skalaren (eindimensionalen) Wellengleichung, schon früher ergeben hatte**, daß eine bekannte, von Einstein aufgefundene Schwierigkeit bezüglich der Energieschwankungen in einem Wellenfeld durch eine quantenmechanische Behandlung der Eigenschwingungen des Feldes gelöst werden konnte. In der Tat gelang es Dirac, eine konsequente Theorie der Emission, Absorption und Dispersion der Strahlung aufzustellen. Jordan*** hat ferner eine Übertragung der Diracschen Methoden der Quantelung von Wellenfeldern auf den Fall der Materiewellen selbst entsprechend der Fermistatistik angegeben, und die Resultate einer neueren Arbeit von Jordan und Klein**** lassen es überdies als sehr aussichtsreich erscheinen, das noch ungelöste Problem einer Quantentheorie der Wechselwirkung von Teilchen bei Mitberücksichtigung der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Kraftwirkungen anzugreifen; eine solche Theorie müßte auch die elektrostatischen und die Strahlungswirkungen des elektromagnetischen Feldes nach einheitlichen Methoden behandeln.

* P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London (A) **114**, 243, 710, 1927.

** M. Born, W. Heisenberg und P. Jordan, ZS. f. Phys. **35**, 557, 1926.

*** P. Jordan, ebenda **44**, 473, 1927. Zusatz bei der Korrektur: Vgl. auch P. Jordan und E. Wigner; im Erscheinen.

**** P. Jordan und O. Klein, ebenda **45**, 751, 1927.

Der Gegenstand der vorliegenden Arbeit soll indessen noch nicht dieses allgemeine Wechselwirkungsproblem sein, sondern es wird hier vorläufig nur beabsichtigt, zunächst im Falle des reinen elektromagnetischen Strahlungsfeldes ohne geladene Teilchen einem Mangel der in den genannten Arbeiten erreichten Formulierungen der Theorie abzuhelpfen, der von deren Verfassern auch stets betont wurde. In diesen Arbeiten wird nämlich die Zeitkoordinate vor den Raumkoordinaten stets in eigentümlicher Weise ausgezeichnet, die Resultate sind nicht relativistisch invariant. Dagegen sind die in der vorliegenden Arbeit zur Quantelung des elektromagnetischen Feldes verwendeten Methoden relativistisch invariant.

Zunächst wird in § 1 noch der Standpunkt angenommen, daß die elektromagnetischen Feldstärken nach Fourier in polarisierte, monochromatische Partialwellen zerlegt werden und deren Amplituden als „ q -Zahlen“ gewisse Vertauschungsrelationen erfüllen. Es gelingt, diese Relationen so zu formulieren, daß kein Bezugssystem der speziellen Relativitätstheorie vor einem anderen durch diese ausgezeichnet ist, während die Schwankungseigenschaften der Strahlungsenergie nach den erwähnten früheren Ergebnissen zugleich richtig durch die Theorie wiedergegeben werden. Dieser Standpunkt kann jedoch durch einen allgemeineren ersetzt werden*, bei welchem eine Fourierzerlegung des Feldes nicht explizite gebraucht wird und die Feldstärken selbst als Kontinuum von q -Zahlen angesehen werden, die stetig von den Raum-Zeitkoordinaten abhängen. Es mögen solche Gesamtheiten von q -Zahlen kurz als „ q -Funktionen“ bezeichnet werden. In den § 2 bis 4 des ersten Teils dieser Arbeit wird dieser allgemeinere Standpunkt, stets unter Wahrung der relativistischen Invarianz, durchgeführt. Es sei hier bemerkt, daß diese Überlegungen sich auch auf Materiewellen kräftefreier bewegter Teilchen vollständig übertragen lassen und zu einer relativistisch invarianten Quantelung dieser Wellen führen, falls man es mit gleichartigen Partikeln zu tun hat, die der Einstein-Bose-Statistik gehorchen. Da jedoch im anderen Falle von Partikeln mit Fermistatistik die Quantelung der Materiewellen noch nicht völlig geklärt ist**, sind wir hierauf in dieser Arbeit nicht näher eingegangen. Von einer noch ausstehenden allgemeinen relativistisch invarianten Quantentheorie der Wellenfelder, die einerseits auch solche elektromagnetischen Felder in Betracht zu ziehen haben wird, die dem Vorhandensein geladener Teilchen entsprechen, andererseits die Beein-

* Vgl. auch P. Jordan, ZS. f. Phys. 45, 766, 1927.

** Anmerkung bei der Korrektur: Vgl. jedoch die oben erwähnte Arbeit von Jordan und Wigner.

flussung der Materiewellen durch die elektromagnetischen Wellen wird in Rechnung stellen müssen, darf wohl erwartet werden, daß sie die hier aufgestellten Vertauschungsrelationen des freien elektromagnetischen Strahlungsfeldes sowie diejenigen der Materiewellen kräftefreier Teilchen als spezielle Grenzfälle in sich enthalten wird.

Der zweite Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, in welcher Weise die q -Funktionen als Operatoren, die auf gewisse „Wahrscheinlichkeitsamplituden“ ψ angewandt werden, interpretierbar sind. In der gewöhnlichen Quantenmechanik geht man ja bekanntlich von den Gleichungen

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$$

und dem Energiesatz

$$H(p, q) = E,$$

was zunächst Relationen zwischen q -Zahlen sind, zu einer Differentialgleichung für die Funktion $\psi_E(q)$ über, indem man p durch den Operator $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q}$, q durch den Operator Multiplikation mit q ersetzt und nun $H(p, q)$, als Operator geschrieben, auf ψ anwendet:

$$H\left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q}, q\right) \psi_E(q) = E \psi_E(q).$$

Im Falle eines harmonischen Oszillators, wo

$$H(p, q) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m}{2} (2\pi\nu_0)^2 q^2$$

gesetzt werden kann, führt die zugehörige Differentialgleichung für ψ , wie Schrödinger gezeigt hat, auf die Eigenwerte

$$E_n = (n + \frac{1}{2}) h\nu_0 \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

während die ψ -Funktionen durch die sogenannten Hermitischen Polynome gegeben werden; für $n = 0$ ist speziell $\psi_0(q) = C e^{-\frac{2\pi^2 m \nu_0}{h} q^2}$.

Dies hat nun eine Schwierigkeit zur Folge, wenn es sich, wie bei den Eigenschwingungen der Hohlraumstrahlung, um unendlich viele Oszillatoren (den unendlich vielen Freiheitsgraden der Strahlung entsprechend) handelt. Erstens würde die gesamte Energiedichte der Strahlung unendlich groß werden, weil zu dieser (im Grenzfalle eines sehr großen Hohlraumes) die Strahlung mit einer Frequenz zwischen ν und $\nu + d\nu$ selbst für $n = 0$ den Beitrag

$$\frac{8\pi\nu^3}{c^3} \frac{h\nu}{2} d\nu$$

liefern würde. Zweitens wird selbst dann, wenn nur eine endliche Zahl von Eigenschwingungen angeregt ist, das Produkt der unendlich vielen Eigenschwingungen im allgemeinen nicht konvergieren, so daß die ψ -Funktion der unendlich vielen Amplituden q_k der Oszillatoren zunächst keinen bestimmten Wert besitzt.

Verschiedene Erwägungen scheinen uns dafür zu sprechen, daß im Gegensatz zu den Eigenschwingungen im Kristallgitter (wo sowohl theoretische als auch empirische Gründe für das Vorhandensein einer Nullpunktsenergie sprechen) bei den Eigenschwingungen der Strahlung jener „Nullpunktsenergie“ $h\nu/2$ pro Freiheitsgrad keine physikalische Realität zukommt. Da man es nämlich bei dieser mit streng harmonischen Oszillatoren zu tun hat und da jene „Nullpunktsstrahlung“ weder absorbiert noch zerstreut oder reflektiert werden kann, scheint sie sich, einschließlich ihrer Energie oder Masse, jeder Möglichkeit eines Nachweises zu entziehen. Es ist deshalb wohl die einfachere und befriedigendere Auffassung, daß beim elektromagnetischen Felde jene Nullpunktsstrahlung überhaupt nicht existiert.

In dieser Verbindung ist es vielleicht von Interesse, zu bemerken, daß es möglich ist, bei einem einzelnen harmonischen Oszillator diese Auffassung auch mathematisch zu formulieren. Führt man nämlich statt p und q die Größen

$$P = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_0 m}} p - i\sqrt{\pi\nu_0 m} q,$$

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_0 m}} p + i\sqrt{\pi\nu_0 m} q$$

ein, so folgt aus

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$$

die Relation

$$PQ - QP = i(pq - qp) = \frac{h}{2\pi},$$

ferner wird

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m}{2} (2\pi\nu_0)^2 q^2 \\ &= 2\pi\nu_0 \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_0 m}} p + i\sqrt{\pi\nu_0 m} q \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_0 m}} p - i\sqrt{\pi\nu_0 m} q \right) \\ & \quad + \pi\nu_0 i (pq - qp) = 2\pi\nu_0 QP + \frac{h\nu_0}{2}. \end{aligned}$$

Führt man also eine neue Hamiltonfunktion

$$H'(P, Q) \equiv 2\pi\nu_0 QP = E$$

mit

$$PQ - QP = \frac{h}{2\pi}$$

ein, so kommt man auf die Eigenwerte

$$E_n = nh\nu_0$$

ohne Nullpunktsenergie. Auch können Eigenfunktionen von $\psi_E(Q)$ aufgestellt werden, wobei allerdings die Variable Q eine komplexe Größe ist. Vielleicht ist zu hoffen, daß auf diesem Wege die mit der Nullpunktsstrahlung zusammenhängenden Konvergenzschwierigkeiten bei unendlich vielen Oszillatoren einmal überwunden werden können.

Im zweiten Teile dieser vorliegenden Arbeit sollte jedoch eine Methode angegeben werden, wie ψ -Funktionen des Feldes und Operationen mit diesen definiert werden können, die mit vorgegebenen Relationen zwischen q -Funktionen im Einklang sind, ohne daß eine explizite Verwendung der Fourierzerlegung des Feldes benötigt wird. Leider ist es uns nicht gelungen, auch unter dieser Bedingung eine der obigen Betrachtung beim Einzeloszillator analoge Elimination der Nullpunktsenergie in befriedigender Weise durchzuführen. Es sind daher die Ausführungen des zweiten Teiles dieser Arbeit noch in hohem Grade verbesserungs- und ergänzungsbedürftig und haben hier mehr im Hinblick auf die allgemeinen mathematischen Methoden, die dort verwendet werden, Platz gefunden, als im Hinblick auf spezielle, dort angegebene Relationen.

I. Methode der q -Funktionen und q -Zahlen.

§ 1. Fourierzerlegung des Feldes, relativistisch invariante Vertauschungsrelationen für die Amplituden der Eigenschwingungen. Wir denken uns das elektromagnetische Strahlungsfeld in ebene monochromatische Partialwellen zerlegt; und zwar denken wir an fortschreitende Wellen, erfüllen also keine besonderen Grenzbedingungen, die etwa undurchlässigen Hohlraumwänden entsprächen. Dagegen ist es zweckmäßig, statt Fourierintegrale zunächst Fourierreihen zu verwenden. Es sei \mathfrak{k}_s der Ausbreitungsvektor einer ebenen Partialwelle (Vektor in Richtung der Wellennormale vom Betrag der Wellenzahl), $|\mathfrak{k}_s| = k_s$ sein absoluter Betrag, ν_s die Schwingungszahl, so daß gilt

$$k_s = \frac{\nu_s}{c}, \quad \mathfrak{k}_s^2 = \frac{\nu_s^2}{c^2}. \quad (1)$$

Der Index s soll nur die verschiedenen Eigenfrequenzen unterscheiden. Zunächst mögen nun die in der Fourierzerlegung des Feldes auftretenden Ausbreitungsvektoren \mathfrak{k}_s mit einer Dichtigkeit im $(\mathfrak{k}_x, \mathfrak{k}_y, \mathfrak{k}_z)$ -Raum (kurz „ \mathfrak{k} -Raum“) verteilt sein, die den Eigenschwingungen eines würfelförmigen Hohlraumes der Kante L (Volumen L^3) entspricht. Das heißt, wir nehmen an, daß das mittlere Volumen einer Zelle des \mathfrak{k} -Raumes, auf die (von dem noch zu besprechenden Polarisationsfaktor abgesehen) eine Partialwelle der Fourierreihe entfällt, gleich ist

$$\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = \frac{1}{L^3}. \quad (2)$$

Die Feldstärken \mathfrak{E} und \mathfrak{H} setzen sich nun zusammen aus den Feldstärken \mathfrak{E}_s und \mathfrak{H}_s einer einzelnen Eigenschwingung, die aus einer monochromatischen Welle besteht:

$$\mathfrak{E} = \sum_s \mathfrak{E}_s, \quad \mathfrak{H} = \sum_s \mathfrak{H}_s.$$

Nun haben wir noch zu berücksichtigen, daß zu jedem \mathfrak{k}_s zwei unabhängige linear polarisierte Wellen möglich sind, deren Schwingungsrichtungen auf \mathfrak{k}_s senkrecht stehen. Um dies formelmäßig darzustellen, führen wir für jedes s ein orthogonales Koordinatensystem $(\xi, \eta, \zeta)_s$ ein, dessen ζ -Achse parallel zu \mathfrak{k}_s ist, und es seien $e_\xi^{(s)}$, $e_\eta^{(s)}$, $e_\zeta^{(s)}$ Einheitsvektoren in den Richtungen ξ , η , ζ . Die Amplituden $a_s^{(1)}$ der elektrischen Feldstärke der einen linear polarisierten Eigenschwingung (mit Index 1 bezeichnet) sei parallel zur ξ -Achse, die der anderen (mit Index 2 bezeichnet) parallel zur η -Achse. Wenn wir noch aus einem sogleich ersichtlichen Grunde den Faktor $\sqrt{\frac{\nu_s}{L^3}}$ hervorziehen, können wir also schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_s &= \sqrt{\frac{\nu_s}{L^3}} \left\{ (e_\xi^{(s)} a_s^{(1)} + e_\eta^{(s)} a_s^{(2)}) \cos 2\pi [(\mathfrak{k}_s r) - |\mathfrak{k}_s| ct] \right. \\ &\quad \left. + (e_\xi^{(s)} b_s^{(1)} + e_\eta^{(s)} b_s^{(2)}) \sin 2\pi [(\mathfrak{k}_s r) - |\mathfrak{k}_s| ct] \right\}, \\ \mathfrak{H}_s &= [e_\zeta^{(s)} \mathfrak{E}_s] = \sqrt{\frac{\nu_s}{L^3}} \left\{ (e_\eta^{(s)} a_s^{(1)} - e_\xi^{(s)} a_s^{(2)}) \cos 2\pi [(\mathfrak{k}_s r) - |k_s| ct] \right. \\ &\quad \left. + (e_\eta^{(s)} b_s^{(1)} - e_\xi^{(s)} b_s^{(2)}) \sin 2\pi [(\mathfrak{k}_s r) - |k_s| ct] \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Der Faktor $\sqrt{\frac{\nu_s}{L^3}}$ in (3) ist so gewählt, daß die ganze Hohlraumenergie

$$E_s = \frac{1}{2} \int (\mathfrak{E}_s^2 + \mathfrak{H}_s^2) dV,$$

soweit sie von einer einzigen, linear polarisierten Partialwelle herrührt, gleich wird

$$E_s = \frac{1}{2} \nu_s (a_s^2 + b_s^2), \quad (4)$$

worin für a_s und b_s entweder $a_s^{(1)}, b_s^{(1)}$ oder $a_s^{(2)}, b_s^{(2)}$ einzusetzen ist. (Die Feldstärken sind hierin in Heavisideschen Einheiten gemessen.)

Da die Energie E_s (abgesehen von der Nullpunktenergie) ein Multiplum von $h\nu_s$ sein muß, das heißt also

$$\frac{1}{2} (a_s^2 + b_s^2)$$

(jedenfalls bis auf eine additive Konstante) die charakteristischen Werte $N_s = 0, 1, 2, \dots$ haben muß, ist es naheliegend, zu setzen:

$$a_s^{(1)} b_s^{(1)} - b_s^{(1)} a_s^{(1)} = a_s^{(2)} b_s^{(2)} - b_s^{(2)} a_s^{(2)} = i h, \quad (I)$$

wobei natürlich a_s und $b_{s'}$ für $s \neq s'$, ebenso wie verschiedene a_s oder verschiedene b_s untereinander vertauschbar sind. Ferner scheint es auch naturgemäß, die Vertauschbarkeit der zu verschiedenen Polarisationsrichtungen gehörigen Amplituden anzunehmen:

$$\left. \begin{aligned} a_s^{(1)} a_s^{(2)} - a_s^{(2)} a_s^{(1)} &= 0, & b_s^{(1)} b_s^{(2)} - b_s^{(2)} b_s^{(1)} &= 0, \\ a_s^{(1)} b_s^{(2)} - b_s^{(2)} a_s^{(1)} &= 0, & a_s^{(2)} b_s^{(1)} - b_s^{(1)} a_s^{(2)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (I')$$

Es ist leicht zu sehen, daß die Vertauschungsrelationen (Abkürzung: „V.-R.“) (I) und (I') von der Wahl der Einheitsvektoren $e_\xi^{(s)}, e_\eta^{(s)}$ unabhängig sind, wenn diese nur senkrecht aufeinander und auf \mathfrak{k}_s stehen. Ähnlich ist die Invarianz von (I) und (I') bei einer Änderung des Nullpunktes des Koordinatensystems zu erweisen, der bei der Fourierzerlegung (3) des Feldes zunächst ausgezeichnet war. Bei einer Änderung dieses Nullpunktes transformieren sich nämlich die a_s und b_s für jede Polarisationsrichtung linear und orthogonal gemäß

$$\begin{aligned} a'_s &= a_s \cos \delta_s + b_s \sin \delta_s, \\ b'_s &= -a_s \sin \delta_s + b_s \cos \delta_s, \end{aligned}$$

und hierfür gilt in der Tat:

$$a'_s b'_s - b'_s a'_s = a_s b_s - b_s a_s. \quad (5)$$

Wenn man weiter beachtet, daß es nicht auf die genauen Werte der \mathfrak{k}_s , sondern nur auf ihre Dichtigkeit (2) im \mathfrak{k} -Raum ankommt, ist ferner mit Rücksicht auf (1) leicht zu sehen, daß die V.-R. (I) die Forderung der relativistischen Invarianz erfüllen.

Dies wird auch besonders deutlich, wenn man den Grenzübergang von Fourierreihen zum Fourierintegral durchführt. Es wird dann

für jede Polarisationsrichtung [wir lassen den Index (1) oder (2) der Einfachheit halber fort]

$$\sum_s a_s^2 \frac{1}{L^3} = \sum_s a_s^2 \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z \rightarrow \int A^2(k_x, k_y, k_z) dk_x dk_y dk_z$$

und analog für $\sum_s b_s^2 \frac{1}{L^3}$. Ferner ergibt sich bei Definition von $E(k_x, k_y, k_z) = E(\mathfrak{f})$ gemäß

$$\sum_s E_s \frac{1}{L^3} = \sum_s \frac{1}{L^3} \frac{1}{2} \int (\mathfrak{G}_s^2 + \mathfrak{H}_s^2) dV \rightarrow \int E(\mathfrak{f}) dk_x dk_y dk_z$$

$$E(\mathfrak{f}) = \frac{1}{2} \nu(\mathfrak{f}) [A^2(\mathfrak{f}) + B^2(\mathfrak{f})]. \quad (6)$$

Wir berechnen weiter, indem wir einerseits über alle Eigenschwingungen mit \mathfrak{f}_s in einem gewissen Gebiet $\mathcal{Q}_1(\mathfrak{f})$ des \mathfrak{f} -Raumes, andererseits über diejenigen mit \mathfrak{f}_s in einem anderen Gebiet $\mathcal{Q}_2(\mathfrak{f})$ summieren und mit $\mathcal{Q}_{1,2}(\mathfrak{f})$ den Volumeninhalt des \mathcal{Q}_1 und \mathcal{Q}_2 gemeinsamen Gebietes im \mathfrak{f} -Raum bezeichnen:

$$\frac{1}{i\hbar} \frac{1}{L^3} \left(\sum_{\mathfrak{f}_s \text{ in } \mathcal{Q}_1(\mathfrak{f})} a_s \sum_{\mathfrak{f}_s \text{ in } \mathcal{Q}_2(\mathfrak{f})} b_s - \sum_{\mathfrak{f}_s \text{ in } \mathcal{Q}_2(\mathfrak{f})} b_s \sum_{\mathfrak{f}_s \text{ in } \mathcal{Q}_1(\mathfrak{f})} a_s \right) = \mathcal{Q}_{1,2}(\mathfrak{f}).$$

Denn es ergibt sich zunächst der Wert der linken Seite als gleich der Anzahl der in beiden Summen gemeinsamen Eigenschwingungen dividiert durch L^3 , was aber gemäß (2) mit $\mathcal{Q}_{1,2}(\mathfrak{f})$ übereinstimmt. Andererseits werden die auf der linken Seite auftretenden Summen in der Grenze den entsprechenden mit $A(\mathfrak{f})$ und $B(\mathfrak{f})$ gebildeten Integralen gleich, so daß wir schreiben können:

$$\int_{\mathcal{Q}_1} A(\mathfrak{f}) dk_x dk_y dk_z \int_{\mathcal{Q}_2} B(\mathfrak{f}) dk_x dk_y dk_z - \int_{\mathcal{Q}_2} B(\mathfrak{f}) dk_x dk_y dk_z \int_{\mathcal{Q}_1} A(\mathfrak{f}) dk_x dk_y dk_z = i\hbar \mathcal{Q}_{1,2} \quad (7)$$

oder mit Hilfe der im folgenden Paragraphen näher betrachteten Diracschen δ -Funktion

$$A(\mathfrak{f}) B(\mathfrak{f}') - B(\mathfrak{f}') A(\mathfrak{f}) = i\hbar \delta(\mathfrak{f} - \mathfrak{f}'). \quad (8)$$

Wichtiger als der Grenzübergang von Fourierreihe zu Fourierintegral ist der Verzicht auf die Fourierzerlegung des Feldes überhaupt und dessen direkte Auffassung als Kontinuum von q -Zahlen („ q -Funktionen“). Hierzu ist es nötig, eine neue, relativistisch invariante δ -Funktion zu definieren, was im folgenden Paragraphen geschehen wird.

§ 2. Definition und Bedeutung der relativistisch invarianten \mathcal{A} -Funktion. Die gewöhnliche Diracsche δ -Funktion einer Variablen x ist durch die Gleichung definiert:

$$\int_a^b \delta(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (a, b) \text{ den Nullpunkt enthält,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (9)$$

Es gilt dann auch

$$\int_a^b f(x) \delta(x) dx = \begin{cases} f(0), & \text{wenn } (a, b) \text{ den Nullpunkt enthält,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (10)$$

Die „Funktion“ $\delta(x)$ kann aufgefaßt werden als Abkürzung für eine Folge von Funktionen $\delta_1(x), \delta_2(x) \dots \delta_N(x) \dots$, für welche der $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b \delta_N(x) dx$ existiert und den oben angegebenen Wert hat. Ebenso soll dann

$$\int_a^b f(x) \delta(x) dx \text{ bedeuten } \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \delta_N(x) dx.$$

Als eine solche Folge von Funktionen kann z. B. genommen werden:

$$\delta_N(x) = \frac{\sin 2\pi Nx}{\pi x} = 2 \int_0^N \cos 2\pi kx dk, \quad (11)$$

da dann

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \delta_N(x) dx = \int_a^\infty f\left(\frac{y}{2\pi N}\right) \frac{\sin y}{\pi y} dy = f(0), \text{ wenn } a < 0, b > 0, \\ = 0, \text{ wenn } a > 0, b > 0.$$

Natürlich ist (11) aber nicht die einzig mögliche Folge $\delta_N(x)$, die (10) im $\lim_{N \rightarrow \infty}$ befriedigt.

Wir werden nun im folgenden Paragraphen einer bestimmten Funktionenfolge $\mathcal{A}_N(x, y, z, t)$ begegnen, und zwar ist sie gegeben durch

$$\mathcal{A}_N(x, y, z, ct) = \iiint_{\substack{\text{Kugel} \\ |t| \leq N}} \frac{2}{|t|} \sin 2\pi (k_x x + k_y y + k_z z - |t| ct) dk_x dk_y dk_z, \quad (12) \\ (|k| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}).$$

Wesentlich darin ist die Bindung des Koeffizienten von t mit denen von x, y, z , welche besagt, daß alle Partialwellen, aus denen sich (12) zusammensetzt, mit der Geschwindigkeit c fortschreiten. $\mathcal{A}_N(x, y, z, t)$ ist

übrigens bei festem Nullpunkt des Koordinatensystems relativistisch invariant, denn wie man leicht nachrechnet, ist für den Fall, daß

$$k_x, k_y, k_z, i|k|$$

die Komponenten eines Vierervektors der Länge Null bilden,

$$\frac{1}{|k|} dk_x dk_y dk_z$$

eine Invariante gegenüber Lorentztransformationen.

Wir wollen nun die Folge $\mathcal{A}_N(\dots)$ charakterisieren als \mathcal{A} -Funktion, d. h. durch den

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{V_4} f(x, y, z, t) \mathcal{A}_N(x \dots t) dV_4,$$

worin über irgend ein vierdimensionales Weltgebiet integriert wird und

$$dV_4 = dx dy dz c dt$$

gesetzt ist. Wir werden diesen lim wieder symbolisch schreiben

$$\int f(x, y, z, t) \mathcal{A}(x, y, z, t) dV_4$$

und solche Folgen \mathcal{A}_N , für welche für alle f dieser lim übereinstimmt, als nicht wesentlich verschieden betrachten, unabhängig davon, ob \mathcal{A}_N gerade die spezielle Gestalt (12) hat.

Nun bietet es gar keine Schwierigkeit, für diese spezielle Gestalt von \mathcal{A}_N den fraglichen lim auszurechnen. Zunächst ist das Integral in (12) auszuwerten. Einführung von Polarkoordinaten im \mathfrak{k} -Raum mit mit $\mathcal{A}(r, \mathfrak{k}) = \mathfrak{g}$, $\cos \mathfrak{g} = u$

$$dk_x dk_y dk_z = 2\pi |k|^2 d|k| du$$

ergibt

$$\mathcal{A}_N(x \dots t) = 4\pi \int_0^N |k| d|k| \int_{-1}^{+1} \sin 2\pi |k| (ru - ct) du,$$

$$(r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

$$= 2 \int_0^N d|k| \left[\frac{1}{r} [\cos 2\pi |k| (r + ct) - \cos 2\pi |k| (r - ct)] \right]$$

oder endlich

$$\mathcal{A}_N(x \dots t) = \frac{1}{\pi r} \left[\frac{\sin 2\pi N(r + ct)}{r + ct} - \frac{\sin 2\pi N(r - ct)}{r - ct} \right]. \quad (12')$$

(Beachte, daß das negative Vorzeichen in der Klammer bewirkt, daß \mathcal{A}_N für $t \neq 0$, $r = 0$ endlich bleibt!)

In vollkommener Analogie zu den Eigenschaften der Funktion $\delta_N(x)$ vom Beginn dieses Paragraphen können wir jetzt auch den $\lim_{N \rightarrow \infty} \int f(\dots) \mathcal{A}_N dV_4$ angeben. Sei V_4 das Integrationsgebiet, V_3^+ dessen dreidimensionaler Schnitt mit dem „Lichtkegel“ $r + ct = 0$, V_3^- der Schnitt mit dem Lichtkegel $r - ct = 0$, so wird

$$\int_{V_4} f(x \dots t) \mathcal{A}(x \dots t) dV_4 = \int_{V_3^+} f(x, y, z, ct = -r) \frac{1}{r} dx dy dz - \int_{V_3^-} f(x, y, z, ct = r) \frac{1}{r} dx dy dz. \quad (II)$$

Und diese Gleichung ist jetzt als Definition der relativistisch invarianten (beachte Invarianz von $\frac{dx dy dz}{r}$) \mathcal{A} -Funktion anzusehen, unabhängig von ihrer speziellen Realisierung durch die Folge (12). Setzt man in (II) $f = 1$, so erhält man den Wert von $\int \mathcal{A} dV_4$:

$$\int_{V_4} \mathcal{A} dV_4 = \int_{V_3^+} \frac{dx dy dz}{r} - \int_{V_3^-} \frac{dx dy dz}{r}. \quad (II')$$

Anschaulich können wir auf Grund von (12') sagen: Die hier eingeführte \mathcal{A} -Funktion ist eine räumlich isotrope, im \lim auf eine unendliche dünne Schale $r = ct$ konzentrierte Kugelschalenwelle, die sich erst mit Lichtgeschwindigkeit zusammenzieht, um für $t = 0$ im Nullpunkt $r = 0$ einzutreffen und sich dann wieder mit Lichtgeschwindigkeit expandiert. Es ist übrigens

$$\mathcal{A}(-x, -y, -z, -t) = -\mathcal{A}(x, y, z, t). \quad (13)$$

Es bleibt noch zu bemerken, daß die Ableitungen der \mathcal{A} -Funktion durch den \lim

$$\int_{V_4} f \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_i} dV_4 \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{V_4} f \frac{\partial \mathcal{A}_N}{\partial x_i} dV_4 = \lim_{N \rightarrow \infty} - \int \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathcal{A}_N dV_4 = \int_{V_3^+} \left(-\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \frac{dx dy dz}{r} - \int_{V_3^-} \left(-\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \frac{dx dy dz}{r}$$

definiert sind, wobei vorausgesetzt wird, daß f am Rande des Integrationsgebietes verschwindet. Analog sind die höheren partiellen Ableitungen zu definieren. Zu bemerken ist noch, daß im Sinne dieser Definition gilt

$$\sum_{a=1}^4 \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x_a^2} \equiv 0. \quad (14)$$

§ 3. V.-R. für die als q -Funktionen betrachteten elektromagnetischen Feldstärken mit Elimination der Fourierzerlegung. Wir wollen nun die Werte der Vertauschungen irgendwelcher Komponenten der elektromagnetischen Feldstärken an zwei verschiedenen Raum-Zeitpunkten unter Wahrung der relativistischen Invarianz zu charakterisieren versuchen, ohne im Endergebnis die Fourierzerlegung des Feldes explizite heranzuziehen. Es handelt sich also um die Ermittlung der Ausdrücke

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_i(P) \mathfrak{E}_k(P') - \mathfrak{E}_k(P') \mathfrak{E}_i(P), \quad \mathfrak{H}_i(P) \mathfrak{H}_k(P') - \mathfrak{H}_k(P') \mathfrak{H}_i(P), \\ \mathfrak{E}_i(P) \mathfrak{H}_k(P') - \mathfrak{H}_k(P') \mathfrak{E}_i(P), \end{aligned}$$

worin P und P' Abkürzungen für die vier Koordinaten x, y, z, t von P und x', y', z', t' von P' sein sollen und wo $i, k = 1, 2, 3$ Indizes sind, welche die Komponenten in der x, y, z -Richtung kennzeichnen. Wir werden für die angegebenen Ausdrücke auch die eckigen Klammersymbole

$$[\mathfrak{E}_i(P), \mathfrak{E}_k(P')], \quad [\mathfrak{H}_i(P), \mathfrak{H}_k(P')], \quad [\mathfrak{E}_i(P), \mathfrak{H}_k(P')]$$

verwenden.

Wir wollen bei unserer Berechnung von den Ausdrücken (3) für die Feldstärken ausgehen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_s &= \sqrt{\frac{v_s}{L^3}} \{ (e_\xi a_s^{(1)} + e_\eta a_s^{(2)}) \cos 2\pi [(\mathfrak{k}_s r) - |\mathfrak{k}_s| ct] \\ &\quad + (e_\xi b_s^{(1)} + e_\eta b_s^{(2)}) \sin 2\pi [(\mathfrak{k}_s r) - |\mathfrak{k}_s| ct] \}, \\ \mathfrak{H}_s &= \sqrt{\frac{v_s}{L^3}} \{ (e_\eta a_s^{(1)} - e_\xi a_s^{(2)}) \cos 2\pi [(\mathfrak{k}_s r) - |\mathfrak{k}_s| ct] \\ &\quad + (e_\eta b_s^{(1)} - e_\xi b_s^{(2)}) \sin 2\pi [(\mathfrak{k}_s r) - |\mathfrak{k}_s| ct] \}. \end{aligned}$$

Für $a_s^{(1)}, b_s^{(1)}$ und $a_s^{(2)}, b_s^{(2)}$ gelten einzeln die Gleichungen (I), während $a_s^{(1)}$ mit $b_s^{(2)}, a_s^{(2)}$ mit $b_s^{(1)}$ gemäß (I') vertauschbar sind.

Wir müssen nun Relationen der Form

$$(e_\xi)_i (e_\xi)_k + (e_\eta)_i (e_\eta)_k = \delta_{ik} - (e_\xi)_i (e_\xi)_k \\ (i, k = x, y, z; \delta_{ik} = 0 \text{ für } i \neq k, 1 \text{ für } i = k)$$

$$(e_\xi)_i (e_\eta)_k - (e_\eta)_k (e_\xi)_i = (e_\xi)_l = \frac{(\mathfrak{k}_s)_l}{|\mathfrak{k}_s|}$$

(i, k, l gerade Permutation von 1, 2, 3)

benutzen, in denen übrigens berücksichtigt wurde, daß die ξ -Achse parallel zu (\mathfrak{k}_s) ist. Setzen wir also bei angegebener Bedeutung der Indizes

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ik} &= \alpha_{ki} = |\mathfrak{k}_s|^2 \delta_{ik} - (\mathfrak{k}_i)(\mathfrak{k}_k), \\ \beta_{ik} &= -\beta_{ki} = |\mathfrak{k}_s| \cdot (\mathfrak{k}_s)_l \quad (\beta_{ik} = 0 \text{ für } i = k), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ferner

$$(P_s) = 2\pi [(\mathfrak{k}_s \cdot \mathfrak{r}) - |\mathfrak{k}_s| ct], \quad (P'_s) = 2\pi [(\mathfrak{k}'_s) - |\mathfrak{k}'_s| ct'],$$

so erhalten wir gemäß (I)

$$[\mathfrak{E}_i(P), \mathfrak{E}_k(P')] = [\mathfrak{H}_i(P), \mathfrak{H}_k(P')] = i\hbar c \frac{1}{L^3} \sum_s |\mathfrak{k}_s| \alpha_{ik}^{(s)} [\cos(P_s) \sin(P'_s) - \sin(P_s) \cos(P'_s)] = i\hbar c \frac{1}{L^3} \sum_s |\mathfrak{k}_s| \alpha_{ik}^{(s)} \sin(P'_s - P_s),$$

ebenso

$$[\mathfrak{E}_i(P), \mathfrak{H}_k(P')] = -[\mathfrak{H}_i(P), \mathfrak{E}_k(P')] = i\hbar c \frac{1}{L^3} \sum_s \frac{2}{|\mathfrak{k}_s|} \beta_{ik}^{(s)} \sin(P'_s - P_s)$$

[also speziell $\mathfrak{E}_i(P)$ mit $\mathfrak{H}_i(P')$ vertauschbar].

Wir ersetzen nun gemäß (2) $\frac{1}{L^3} \sum_s (\dots)$ durch $\int (\dots) dk_x dk_y dk_z$,

wollen aber zuerst über eine Kugel mit dem Radius N im \mathfrak{k} -Raum integrieren und erst dann zur Grenze $N \rightarrow \infty$ übergehen. Ferner benutzen wir, daß bei Bildung der zweiten Ableitung von $\sin(P'_s - P_s)$ nach den Raumkoordinaten x_i und x_k von P oder P' der Faktor $-4\pi^2 \mathfrak{k}_i \mathfrak{k}_k$, bei derjenigen nach x_i und ct der Faktor $+4\pi^2 |\mathfrak{k}_s| \mathfrak{k}_i$ vor diesen $\sin(\dots)$ tritt. Auf diese Weise lassen sich die Faktoren $\alpha_{ik}^{(s)}$ und $\beta_{ik}^{(s)}$ durch geeignete Kombinationen solcher zweiter Ableitungen ersetzen und man erhält

$$\begin{aligned} [\mathfrak{E}_i(P), \mathfrak{E}_k(P')] &= [\mathfrak{H}_i(P), \mathfrak{H}_k(P')] \\ &= \frac{i\hbar c}{8\pi^2} \iiint \frac{2}{|\mathfrak{k}|} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} - \delta_{ik} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \sin(P' - P)_k dk_x dk_y dk_z, \\ [\mathfrak{E}_i(P), \mathfrak{H}_k(P')] &= -[\mathfrak{H}_i(P), \mathfrak{E}_k(P')] \\ &= \frac{i\hbar c}{8\pi^2} \iiint \frac{2}{|\mathfrak{k}|} \frac{\partial^2}{c \partial t \partial x_i} \sin(P' - P)_k dk_x dk_y dk_z. \end{aligned}$$

Hierin können Differentiation und Integration vertauscht werden und das Integral vor der Differentiation gibt gerade die in (12) stehende Funktion \mathcal{A}_N , in welche die Argumente $x' - x, \dots t' - t$ einzusetzen sind. Bezeichnen wir $\mathcal{A}(x' - x, \dots t' - t)$ mit $\mathcal{A}(P' - P)$ und gehen wir zum $\lim N \rightarrow \infty$ über, so kommt also endgültig

$$\left. \begin{aligned} [\mathfrak{E}_i(P), \mathfrak{E}_k(P')] &= [\mathfrak{H}_i(P), \mathfrak{H}_k(P')] \\ &= \frac{i\hbar c}{8\pi^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} - \delta_{ik} \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \right) \mathcal{A}(P' - P), \\ [\mathfrak{E}_i(P), \mathfrak{H}_k(P')] &= -[\mathfrak{H}_i(P), \mathfrak{E}_k(P')] = \frac{i\hbar c}{8\pi^2} \frac{\partial^2}{c \partial t \partial x_i} \mathcal{A}(P' - P) \end{aligned} \right\} \text{(III)}$$

($i, k = 1, 2, 3$; in der zweiten Gleichung für $i = k$ rechte Seite Null, für $i \neq k$ ist i, k, l gerade Permutation von $1, 2, 3$).

Es sei ferner daran erinnert, daß gemäß (13) gilt

$$\mathcal{A}(P - P') = -\mathcal{A}(P' - P). \quad (13')$$

Mit

$$\begin{aligned} (F_{41}, F_{42}, F_{43}) &= i\mathfrak{E}, & (F_{23}, F_{31}, F_{12}) &= \mathfrak{H}, \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x, y, z, ict) \end{aligned}$$

kann (III) in die einzige, vierdimensional invariante Form zusammengefaßt werden:

$$[F_{ik}(P), F_{lm}(P')] = \frac{i\hbar c}{8\pi^2} \mathcal{A}_{ik,lm}(P' - P), \quad (III')$$

worin $\mathcal{A}_{ik,lm}$ eine Abkürzung ist für

$$\mathcal{A}_{ik,lm} = \left(\delta_{kl} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_m} - \delta_{il} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_m} + \delta_{im} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} - \delta_{km} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} \right) \mathcal{A}. \quad (16)$$

Beim Vergleich von (III) und (III') ist die in Gleichung (14) des vorigen Paragraphen zum Ausdruck gebrachte Eigenschaft

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha}^2} \mathcal{A} = 0$$

heranzuziehen.

§ 4. Einfache Folgerungen aus den V.-R. für die Feldstärken. Über die Stellung der Quantenelektrodynamik zu den Maxwell'schen Gleichungen. Die q -Funktionen, die nach der hier zugrunde gelegten Form der Quantenelektrodynamik die Feldstärken darstellen, sind nicht beliebige Funktionen von Raum und Zeit, sondern solche, die den Maxwell'schen Vakuumfeldgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial F_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{ji}}{\partial x_k} &= 0, \\ \sum_{\alpha} \frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial x_{\alpha}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (IV)$$

genügen. Dies ist bereits in unserem Ausgangspunkt, der Zerlegung des Feldes in transversale Partialwellen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, enthalten. Hierbei ist die Ladungs- und Stromdichte überall als verschwindend angenommen worden. Dem liegt die Voraussetzung zugrunde, daß die Betrachtung dieses Sonderfalles eine mit den Gesetzen der Quantenelektrodynamik verträgliche Abstraktion sei. Inwieweit dies zutrifft, wird erst durch die Aufstellung einer allgemeineren, das Verhalten geladener Teilchen mitberücksichtigenden Quantenelektrodynamik beurteilt werden können. Läßt man aber diese Voraussetzung zu, so kann man sagen, daß die klassischen Feldgleichungen (IV) auch in die Quantenelektrodynamik explizite eingehen, und zwar als Nebenbedingungen, die den q -Funktionen der Feldstärken auferlegt werden.

Damit die V.-R. (III) mit den Feldgleichungen (IV) verträglich sind, müssen die linken Seiten der Gleichungen (16) vermöge (III') mit irgend einer Feldstärkenkomponente F_{lm} vertauschbar sein. Dafür, daß dies in der Tat der Fall ist, verbürgt uns bereits die Ableitung der V.-R. (III') aus denen der Fourierzerlegung des Feldes. Man kann es aber leicht durch direkte Rechnung bestätigen. Besonders einfach ist die Betrachtung, was die zweiten Gleichungen (IV) betrifft, denn die Operation $\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ angewandt auf die rechte Seite von (III') gibt bei beliebigem festem l, m

$$\left(-\delta_{il} \frac{\partial}{\partial x_m} + \delta_{im} \frac{\partial}{\partial x_l}\right) \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x_{\alpha}^2}$$

und dies ist vermöge (14) identisch Null. In analoger Weise, nur etwas länger, verläuft die Rechnung, was die ersten Gleichungen (IV) betrifft. Rascher kommt man zum Ziel, wenn man den zu F_{ik} dualen Tensor F_{ik}^* einführt, dessen Komponenten gegeben sind durch

$$(F_{23}^*, F_{31}^*, F_{12}^*) = -i\mathfrak{E}, (F_{41}^*, F_{42}^*, F_{43}^*) = -\mathfrak{H},$$

mit dessen Hilfe die ersten Gleichungen (IV) bekanntlich auch geschrieben werden können

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial F_{i\alpha}^*}{\partial x_{\alpha}} = 0. \quad (\text{IV}')$$

Der Übergang zum dualen Tensor bedeutet nun, daß man $i\mathfrak{E}$ durch $-\mathfrak{H}$, also \mathfrak{E} durch $i\mathfrak{H}$, und \mathfrak{H} durch $-i\mathfrak{E}$ ersetzt. Wie man aus (III) unmittelbar erkennt, ändern hierbei die Werte aller Klammerausdrücke einfach ihr Vorzeichen. Also gilt auch

$$[F_{ik}^*(P), F_{lm}^*(P')] = -[F_{ik}(P), F_{lm}(P')] = -\frac{i\hbar c}{8\pi^2} \mathcal{A}_{ik,lm}(P' - P), \quad (\text{III}'')$$

woraus die Vertauschbarkeit von (IV') mit F_{lm} ebenso folgt, wie aus (III') die Vertauschbarkeit von $\sum_{\alpha} \frac{\partial F_{i\alpha}^*}{\partial x_{\alpha}}$ mit F_{lm} .

Da ferner auf Grund von (III) leicht zu verifizieren ist, daß gilt $[F_{ik}(P), F_{lm}^*(P')] = -[F_{ik}^*(P), F_{lm}(P')]$, $[F_{ik}(P), F_{ik}^*(P')] = 0$, (17) folgt weiter in Verbindung mit (III'') für die Tensoren

$$E_{ik} = F_{ik} + F_{ik}^*, \quad E_{ik}^* = F_{ik} - F_{ik}^*, \quad (18a)$$

$$[E_{ik}(P), E_{lm}(P')] = 0, \quad [E_{ik}^*(P), E_{lm}^*(P')] = 0, \quad (18b)$$

$$[E_{ik}(P), E_{lm}^*(P')] = 2[F_{ik}(P), F_{lm}(P')] + 2[F_{ik}^*(P), F_{lm}(P')],$$

$$[E_{ik}^*(P), E_{lm}(P')] = 2[F_{ik}(P), F_{lm}(P')] - 2[F_{ik}^*(P), F_{lm}(P')].$$

Die Relationen (18b) sind deshalb besonders bemerkenswert, weil sie bedeuten, daß es erlaubt ist, für die q -Funktionen $E_{ik}(P)$ allein [oder für die Funktionen $E_{ik}^*(P)$ allein] bei speziellen Anwendungen gewöhnliche Funktionen („ c -Funktionen“) zu substituieren, da ihre Werte an verschiedenen Raum-Zeitpunkten stets vertauschbar sind. Funktionen mit ähnlichen Eigenschaften erhält man auch, wenn man die Feldstärken $F_{ik}(P)$ in bezug auf einen beliebig zu wählenden Nullpunkt spiegelt: $F_{ik}^+(P) = \frac{1}{2} [F_{ik}(P) + F_{ik}(-P)]$, $F_{ik}^-(P) = \frac{1}{2} [F_{ik}(P) - F_{ik}(-P)]$, so daß gilt

$$F_{ik}^+(P) = F_{ik}^+(-P), \quad F_{ik}^-(P) = -F_{ik}^-(-P).$$

Man erhält leicht

$$\begin{aligned} [F_{ik}^+(P), F_{lm}^+(P')] &= \frac{i\hbar c}{8\pi^2} \cdot \frac{1}{4} [\mathcal{A}_{iklm}(P' - P) + \mathcal{A}_{iklm}(P' + P) \\ &+ \mathcal{A}_{iklm}(-P' - P) + \mathcal{A}_{iklm}(-P' + P)]. \end{aligned}$$

Da für \mathcal{A}_{iklm} die zu (13') analoge Symmetrieeigenschaft

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{iklm}(P' - P) &= -\mathcal{A}_{iklm}(-P' + P), \\ \mathcal{A}_{iklm}(P' + P) &= -\mathcal{A}_{iklm}(-P' - P) \end{aligned}$$

besteht, heben sich die beiden mittleren Terme sowie der erste und letzte Term der Klammer gegeneinander weg und die rechte Seite verschwindet. Analoges findet man auch für $[F_{ik}^-(P), F_{lm}^-(P')]$, so daß gilt

$$[F_{ik}^+(P), F_{lm}^+(P')] = [F_{ik}^-(P), F_{lm}^-(P')] = 0. \quad (19a)$$

Dagegen folgt leicht auf demselben Wege

$$[F_{ik}^+(P), F_{lm}^-(P')] = \frac{i\hbar c}{16\pi^2} [\mathcal{A}_{ik,lm}(P' - P) + \mathcal{A}_{ik,lm}(P' + P)], \quad (19b)$$

$$[F_{ik}^-(P), F_{lm}^+(P')] = \frac{i\hbar c}{16\pi^2} [\mathcal{A}_{ik,lm}(P' - P) - \mathcal{A}_{ik,lm}(P' + P)]. \quad (19c)$$

Die Vertauschbarkeit der linken Seiten der Maxwellschen Gleichungen mit allen Feldstärkekomponenten kann in Anwendung auf die letzteren Gleichungen auch so formuliert werden: Bei festem l, m und P' sind die rechten Seiten von (19b), für $F_{ik}^+(P)$ eingesetzt, Lösungen der Maxwellschen Gleichungen (IV), dasselbe gilt auch, wenn die rechte Seite von (19b) bei festem i, k und P für $F_{lm}^-(P')$ eingesetzt wird. Strenger ist statt von Lösungen der Maxwellschen Gleichungen wegen der Benutzung der \mathcal{A} -Funktion stets von singulären Grenzfällen solcher Lösungen zu sprechen.

Die letztere Eigenschaft der Relationen (19) werden wir später benutzen. Hier sei noch bemerkt, daß für die Viererpotentiale keine einfach formulierbaren relativistisch invarianten V.-R. bestehen, bei denen nur die \mathcal{A} -Funktion und ihre Ableitungen verwendet werden.

II. Methode der Funktionale und Funktionaloperatoren.

§ 1. Eindimensionales Kontinuum, unrelativistisch behandelt. Wir betrachten stehende longitudinale Schwingungen in einem eindimensionalen Kontinuum mit den Grenzbedingungen

$$q(x) = 0 \quad \text{für } x = 0 \quad \text{und } x = l.$$

Wir können dann setzen

$$\left. \begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{s=0}^{\infty} q_s \sin 2\pi k_s x, \quad k_s = s \frac{x}{2l}, \quad s \text{ ganz;} \\ \text{analog für den „Impuls“} \\ p(x) &= \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{s=0}^{\infty} p_s \sin 2\pi k_s x. \end{aligned} \right\} (20)$$

Die klassischen Bewegungsgleichungen seien

$$\dot{p}_s = -2\pi \nu_s q_s, \quad \dot{q}_s = 2\pi \nu_s p_s, \quad \nu_s = c k_s$$

und die Gesamtenergie

$$E = \sum_s \frac{1}{2} \{p_s^2 + (2\pi \nu_s)^2 q_s^2\} = \frac{1}{2} \int \left[p^2(x) + c^2 \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \right] dx. \quad (21)$$

Quantenmechanisch treten zu (18) die V.-R.

$$p_s q_{s'} - q_{s'} p_s = \begin{cases} \frac{\hbar}{2\pi i}, & \text{wenn } s = s', \\ 0, & \text{wenn } s \neq s', \end{cases} \quad (22)$$

hinzu. Diese sind, wie aus einer einfachen Rechnung folgt*, äquivalent mit

$$p(x) q(x') - q(x') p(x) = \frac{\hbar}{2\pi i} \delta(x - x') [x, x' \text{ in } (0, l)], \quad (23)$$

worin δ die Diracsche Funktion (vgl. I, § 2) bedeutet.

Bekanntlich kann nun (22) bei Einführung einer Schrödingerfunktion

$$\psi(q_1 \dots q_s \dots)$$

der unendlich vielen Variablen $q_1 \dots q_s \dots$ auch als Operatorgleichung gedeutet werden, wenn man

$$\begin{array}{ll} q_s \text{ durch den Operator} & \text{Multiplikation mit } q_s \\ p_s \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} & \text{Differentiation } \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_s}, \end{array}$$

* Vgl. z. B. P. Jordan und O. Klein, ZS. f. Phys. **45**, 751, 1927.
Zeitschrift für Physik. Bd. 47.

ersetzt. Es beruht dies auf der Identität

$$\frac{\partial}{\partial a_s} (a_s \psi) - a_s \frac{\partial \psi}{\partial a_s} = \psi.$$

Der Energiesatz führt dann nach (21) auf die Differentialgleichung

$$\frac{1}{2} \sum_s \left(-\frac{h^2}{4\pi^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial a_s^2} + \left(\sum_s \frac{1}{2} (2\pi v_s)^2 a_s^2 \right) \psi = E \psi. \quad (24)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist bei unendlich vielen Variablen allerdings nicht konvergent, was mit der endlichen Nullpunktsenergie $\frac{h v_s}{2}$ pro Eigenschwingung zusammenhängt. Diese noch ganz ungelöste Schwierigkeit wurde in der Einleitung ausführlich besprochen.

Hiervon abgesehen, drängt sich aber die folgende Fragestellung auf. Was ist das Analogon zur Operator Darstellung von (22) und zur Gleichung (24), wenn wir statt von den abzählbar unendlich vielen Variablen $q_1 \dots q_s \dots$ von der Funktion $q(x)$, also einem Kontinuum von unabhängig zu variierenden Variablen ausgehen? Die Antwort darauf kann mit Hilfe der Volterraschen Funktionalmathematik gegeben werden. Ein Funktional

$$\Psi \{q(x)\}$$

ist die Zuordnung einer Zahl zu einer Funktion $q(x)$. Ein solches heißt im Punkt P differenzierbar, wenn folgender Grenzwert unabhängig von seiner speziellen Durchführung stets existiert: Man bilde eine variierte Funktion $q(x) + \bar{q}(x)$ und lasse das Intervall, in welchem $\bar{q}(x)$ von 0 verschieden ist, sich auf den Punkt $x_0 = P$ zusammenziehen, während gleichzeitig auch $\int \bar{q}(x) dx$ nach Null konvergiert. Dann heißt

$$\Psi_{q(x); P} = \lim \frac{\Psi \{q(x) + \bar{q}(x)\} - \Psi \{q(x)\}}{\int \bar{q}(x) dx}.$$

Mit Hilfe der δ -Funktion kann man dies auch schreiben

$$\Psi_{q(x); P} = \lim_{\substack{\bar{q}(x_{P'}) \rightarrow \delta(x_{P'} - x_P) \\ \alpha \rightarrow 0}} \frac{1}{\alpha} [\Psi \{q(x) + \alpha \bar{q}(x)\} - \Psi \{q(x)\}]. \quad (25)$$

Die gewöhnliche Regel für Differentiation von Summe und Produkt bleibt bestehen. Analog ist die zweite Ableitung definiert durch

$$\Psi_{q(x), q(x); P P_1} = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \bar{q}(x) \rightarrow \delta(x - x_{P_1})}} \frac{1}{\alpha} [\Psi_{q(x); P} \{q(x) + \alpha \bar{q}(x)\} - \Psi_{q(x); P} \{q(x)\}]. \quad (25a)$$

Ein spezieller Fall hiervon ist die zweite Ableitung für $P_1 = P$, die wir durch den Index $q(x), q(x); P P$ bezeichnen werden.

Wir werden nun für $p(x)$ und $q(x)$ Funktionaloperatoren suchen, das heißt Zuordnungen neuer Funktionale $\overline{\Psi}$ und $\overline{\overline{\Psi}}$ zu Ψ . Diese können durch die Formeln

$$\left. \begin{aligned} \left(\int_J \underline{p(x)} dx \right) \cdot \Psi \{q(x)\} &\rightarrow \overline{\Psi}_J \{q(x)\}, \\ \left(\int_J \underline{q(x)} dx \right) \cdot \Psi \{q(x)\} &\rightarrow \overline{\overline{\Psi}}_J \{q(x)\} \end{aligned} \right\}$$

beschrieben werden, in denen links über ein beliebig vorgegebenes Intervall J von x zu integrieren ist und die Abhängigkeit der Funktionale $\overline{\Psi}$ und $\overline{\overline{\Psi}}$ von diesem Intervall durch den beigegefügt Index J zum Ausdruck gebracht ist. Diese Zuordnung muß nun speziell so gewählt werden, daß die als Operatorgleichung aufgefaßte Relation (23) erfüllt ist. Es ist klar, daß

$$\left. \begin{aligned} \left(\int_{x_1}^{x_2} \underline{p(x)} dx \right) \cdot \Psi \{q(x)\} &= \frac{h}{2\pi i} \int_{x_1}^{x_2} \Psi_{q(x); P} dx_P, \\ \left(\int_{x_1}^{x_2} \underline{q(x)} dx \right) \cdot \Psi \{q(x)\} &= \Psi \{q(x)\} \cdot \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

dieser Bedingung genügen.

Der Energiesatz (21) ergibt ferner die funktionelle Integrodifferentialgleichung

$$\int (-) \left(\frac{h}{4\pi} \right)^2 \Psi_{q(x), q(x); PP} dx_P + c^2 \left[\int \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 dx \right] \cdot \Psi = E \Psi \quad (27)$$

Um das Analogon der Orthogonalitätsbedingung aufzustellen, braucht man die Definition von

$$\int \psi_E \psi_{E'} \delta \Omega$$

über den Funktionenraum. Eine naheliegende Definition wäre die Teilung der Strecke $(0, l)$ in N Intervalle und die Betrachtung von Treppenvolygonen $q(x)$, welche in den einzelnen Intervallen die konstanten Werte q_1 bis q_N haben mögen. Hernach gehe man zur Grenze $N \rightarrow \infty$ über:

$$\int \psi_E \psi_{E'} \delta \Omega = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int \psi_E(q_1 \dots q_N) \psi_{E'}(q_1 \dots q_N) dq_1 \dots dq_N = \delta(E - E')$$

Doch ist hier die erwähnte Konvergenzschwierigkeit vorläufig hinderlich.

§ 2. Relativistisch invariante Funktionalbehandlung des Falles zweier kanonisch konjugierter skalarer q -Funktionen, die der Wellengleichung genügen. Als Vorbereitung für das Problem der Vakuum-Elektrodynamik soll zunächst folgendes einfachere Problem

behandelt werden. Zwei skalare Zustandsgrößen f und g mögen beide der (vierdimensionalen) Wellengleichung

$$\sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2} = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial^2 g}{\partial x_\alpha^2} = 0 \quad (28)$$

genügen. Ferner soll für sie, als „ g -Funktionen“ von x, y, z, t aufgefaßt die V.-R. gelten

$$f(P)g(P') - g(P')f(P) = ih \mathcal{A}(P - P'), \quad (29)$$

worin \mathcal{A} die in I, § 2 definierte Funktion ist, während die Werte von f an verschiedenen Punkten unter sich vertauschbar sind, ebenso die Werte von g unter sich. Es ist gefragt, wie diese V.-R. als Beziehung zwischen Funktionaloperatoren gedeutet werden kann, analog der Einführung der Operatoren (26) in (23).

Infolge des Umstandes, daß $g(P)$ mit $g(P')$ vertauschbar ist, ist es erlaubt, Funktionale

$$\mathfrak{P}\{g(x_1 \dots x_4)\}$$

zu betrachten, in denen die Werte von $g(x_1 \dots x_4)$ jetzt gewöhnliche Zahlen sind. Wesentlich ist aber, daß $g(x_1 \dots x_4)$ nunmehr keine willkürlichen Funktionen von $x_1 \dots x_4$ sein können, sondern nur solche, die der Wellengleichung genügen. Innerhalb des Bereiches dieser speziellen Funktionen müssen wir auch verbleiben, wenn wir $g(x_i)$ variieren. Insbesondere ist es also nicht mehr möglich, die Variation $\bar{g}(x_1 \dots x_4)$ so zu wählen, daß sie nur in der Umgebung eines Wertpunktes von Null verschieden ist. Die Tatsache, daß nunmehr dem Argument des Funktionals \mathfrak{P} die Wellengleichung oder allgemeiner eine lineare partielle Differentialgleichung als Nebenbedingung auferlegt ist, macht also eine Abänderung des Volterraschen Begriffes der funktionellen Ableitung notwendig.

Eine solche ergibt sich indessen von selbst, wenn wir einfach in der Schreibweise (25) der Volterraschen Ableitung die gewöhnliche δ -Funktion durch die Kugelschalenwellen- \mathcal{A} -Funktion von I, § 2 ersetzen, indem wir uns daran erinnern, daß diese ja gemäß I, § 2, Gleichung (13) eine Lösung von (28) ist.

Wir definieren also jetzt eine funktionelle Ableitung durch

$$\mathfrak{P}_{g(x_i); P} = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \bar{g}[x_i(P')] \rightarrow \mathcal{A}(P - P')}} \frac{1}{\alpha} [\mathfrak{P}\{g(x_i) + \alpha \bar{g}(x_i)\} - \mathfrak{P}\{g(x_i)\}]. \quad (30)$$

Da auch für diese Ableitung die Regeln für Differentiation von Summe und Produkt bestehen bleiben, ist ferner unmittelbar klar, daß

(29) durch den folgenden, zu (26) völlig analogen Operatoransatz befriedigt wird:

$$\underbrace{\left[\int g(x_i) dx_1 \dots dx_4 \right]}_{\text{Operator}} \cdot \Psi \{g(x)\} = ih \int_{V_4} \Psi_{g(x_i); P} dx_1 \dots dx_4; \quad (31)$$

ebenso bedeutet $f(x)$ als Operator einfach Multiplikation mit $f(x)$.

Damit ist die in diesem Paragraphen gestellte Frage vollständig beantwortet und wir können nun unser eigentliches Ziel, die Funktionalgleichung der Lichtquantenelektrodynamik, ins Auge fassen.

§ 3. Darstellung der V.-R. der Vakuum-Elektrodynamik als relativistisch invariante Relationen zwischen Funktionaloperatoren. Impuls-Energiesatz als Verallgemeinerung der Schrödingergleichung. Wenn wir die durch I, Gleichung (3) definierten Fourieramplituden $b_1 \dots b_s \dots$ als unabhängige Variable einführen, ist die Funktionaldarstellung klar und der q -Zahl a_s entspricht der Operator $ih \frac{\partial}{\partial a_s}$. Die in II, § 1 erwähnte Konvergenzschwierigkeit stellt sich allerdings auch hier ein und läßt auch das Folgende noch als weitgehend problematisch erscheinen.

Auch hiervon abgesehen, stellt sich aber eine Schwierigkeit ein, wenn wir in unserer Funktionaldarstellung eine Fourierzerlegung des Feldes nicht explizite benutzen wollen. Wie bereits im vorigen Paragraphen erwähnt, können nämlich nur solche physikalischen Feldgrößen als Argumente eines Funktionals verwendet werden, die, als q -Funktionen aufgefaßt, für alle Raum-Zeitpunkte vertauschbar sind. Bei Annahme der in Teil I formulierten V.-R. (III) für die Feldstärken F_{ik} können also diese selbst als Argumente eines Funktionals nicht in Betracht kommen, sondern gemäß I, § 4, Gleichung (18b) oder (19a) nur eines von den vier dort definierten Größensystemen $F_{ik}^+(P)$, $F_{ik}^-(P)$, $E_{ik}(P)$, $E_{ik}^*(P)$. Die Heranziehung dieser Funktionen, namentlich der in bezug auf einen festen Punkt gespiegelten Größen F_{ik}^+ und F_{ik}^- , erscheint als sehr künstlich, indessen ist es uns nicht möglich gewesen, sie zu vermeiden.

Die folgende Betrachtung ist für Funktionale des in bezug auf einen festen Nullpunkt schiefssymmetrischen Teiles $F_{lm}^-(x_1 \dots x_4)$ der Maxwell'schen Gleichungen [Teil I, Gleichung (IV)] durchgeführt, die wir also mit

$$\Psi \{F_{lm}^-(x_1 \dots x_4)\}$$

bezeichnen können. Natürlich könnte man in allen folgenden Überlegungen F_{ik}^- und F_{ik}^+ auch die Rollen tauschen lassen; auch würden bei Einführung von E_{ik} oder E_{ik}^* als Argumenten der Funktionale analoge Überlegungen gelten.

Das Problem liegt ganz ähnlich wie das des vorigen Paragraphen, nur daß hier als Argumente des Funktionals mehrere (sechs) Funktionen simultan auftreten, die durch die Gleichungen (IV), die Maxwell'schen Gleichungen, voneinander abhängig gemacht werden. Man kann jetzt also nicht nach einzelnen der sechs Komponenten der Feldstärken differenzieren, weil eine Feldstärkenkomponente nicht ohne die übrigen variiert werden kann. Wieder ist es die \mathcal{A} -Funktion, diesmal mit ihren zweiten Ableitungen, die hier Abhilfe schafft. Führen wir den durch Teil I, Gleichung (16) definierten Ausdruck $\mathcal{A}_{ik,lm}$ ein, dann ist gemäß I, § 4 für jedes Indexpaar (i, k)

$$F_{lm}^-(P') = \mathcal{A}_{ik,lm}(P' - P) + \mathcal{A}_{ik,lm}(P' + P) = \mathcal{A}_{ik,lm}^-(P', P) \quad (32)$$

bei festem P eine zulässige Variation der F_{lm}^- , weil sie den Maxwell'schen Gleichungen genügt und auch die Symmetriebedingung [Vorzeichenänderung beim Übergang von (P') zu $(-P')$] erfüllt. Wir können also die sechs folgenden, durch (i, k) und schiefe Symmetrie in diesem Indexpaar charakterisierten Ableitungen unseres Funktionals $\Psi \{F_{lm}^-(P')\}$ in Analogie zu (30) definieren:

$$\begin{aligned} \Psi'_{ik;P} \{F_{lm}^-(P')\} = & \lim_{\delta F_{lm}^-(P') \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{A}_{ik,lm}^-(P',P)} \frac{1}{\alpha} [\Psi \{F_{lm}^-(P') \\ & + \alpha (\delta F_{lm}^-(P'))\} - \Psi \{F_{lm}^-(P')\}]. \end{aligned} \quad (33)$$

Es ist dann auch unmittelbar klar, daß die V.-R. (III), als Operatorgleichung gefaßt, erfüllt ist, wenn der zu $F_{ik}^+(P)$ gehörige Operator definiert wird gemäß

$$\left(\int_J \dots \int F_{ik}^+(P) dV_P \right) \cdot \Psi \{F_{lm}^-(P')\} = \frac{ihc}{16\pi^2} \int_J \int \Psi'_{ik;P} \{F_{lm}^-(P')\} dV_P, \quad (34)$$

worin mit dV_P das Volumenelement des vierdimensionalen Raumes der Koordinaten $x_1 \dots x_4$ von P und mit J ein beliebiges, endliches vierdimensionales Intervall in diesem bezeichnet ist, während

$$\int_J F_{lm}^-(P) dV_P$$

als Operator einfach Multiplikation mit dieser Größe bedeutet.

Hier sollen noch kurz Überlegungen solcher Art angeführt werden, die analog sind denjenigen, die in II, § 1 zur Aufstellung der Gleichung (25) führten. Zunächst ist wohl klar, wie zweite Ableitungen unseres Funktionals Ψ gebildet werden können; die allgemeinste zweite Ableitung schreiben wir

$$\Psi'_{ik,rs;PP_1},$$

doch wird im folgenden nur der Spezialfall $P_1 = P$ benötigt werden. Wesentlich berücksichtigt werden muß, daß in einer relativistisch invarianten Theorie neben dem Energieintegral die Impulsintegrale als gleichwertig angesehen werden müssen, so daß wir für das von den vier Gesamtenergie-Impulskomponenten $J_4 = -E$; $(J_1, J_2, J_3) = ic\mathfrak{G}$ abhängige „Eigen“-Funktional Ψ_{J_k} vier simultane partielle funktionale Differentialgleichungen zweiter Ordnung erhalten. Bekanntlich drückt sich J_k in der klassischen Elektrodynamik folgendermaßen durch die Feldstärken aus:

$$J_k = \int_{t = \text{const}}^4 \left[\sum_{r=1}^4 F_{kr} F_{4r} - \delta_{k4} \cdot \sum_{(rs)} \frac{1}{2} (F_{rs})^2 \right] dx dy dz.$$

Wir können den Schnitt $t = \text{const}$ speziell als $t = 0$ wählen, d. h. als solchen, der durch den Nullpunkt geht, den wir für die Teilung der Feldstärken in F_{ik}^+ und F_{ik}^- verwendet haben. Dann zerfällt jedes der vier Integrale J_k in zwei Teile, die von den F_{ik}^+ bzw. F_{ik}^- allein abhängen, da die Integrale über die gemischten Glieder aus Symmetriegründen verschwinden. Wir erhalten so die vier simultanen ($k = 1$ bis 4 entsprechenden), zu (27) analog gebildeten Gleichungen

$$\begin{aligned} & \left(\frac{ihc}{16\pi^2} \right)^2 \iiint_{t=0}^{\infty} \left[\sum_{r=1}^4 \Psi''_{kr; 4r; PP} - \delta_{k4} \sum_{(rs)} \frac{1}{2} \Psi''_{rs; rs; PP} \right] dx_P dy_P dz_P \\ & + \Psi \iiint \left[\sum_{r=1}^4 F_{kr}^- F_{4r}^- - \delta_{k4} \frac{1}{2} \sum_{rs} (F_{rs}^-)^2 \right] dx_P dy_P dz_P = J_k \Psi, \quad (35) \end{aligned}$$

worin Ψ ein Funktional ist, das von den $F_{rs}^-(x_k)$ und daneben noch von den J_k als Parametern abhängt. Diese Gleichungen spielen für ein „abgeschlossenes“ Strahlungsfeld eine analoge Rolle, wie die Schrödingersche Differentialgleichung für einen bestimmten Quantenzustand eines abgeschlossenen mechanischen Systems.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, sind die im letzten Paragraphen dieses Teiles II angeführten Gleichungen, für die übrigens direkte Integrationsmethoden noch nicht vorliegen, in noch höherem Grade als vorläufig anzusehen, als die in Teil I entwickelten Überlegungen über q -Funktionen. Jedoch halten wir die Einführung von Funktionalen in eine konsequente quantentheoretische Umdeutung der klassischen Feldphysik trotz vieler ungelöster Probleme bei ihrer speziellen Durchführung im allgemeinen für naturgemäß.