

THÉORIE DU POSITRON

PAR M. P.-A.-M. DIRAC.

La découverte récente de l'électron positif ou positron a ramené l'attention vers une théorie déjà ancienne sur les états d'énergie négative de l'électron, les résultats expérimentaux obtenus jusqu'ici se trouvant d'accord avec les prévisions de cette théorie.

La question des énergies négatives se pose dès que l'on étudie le mouvement d'une particule conformément au principe de relativité restreinte. Dans la mécanique non relativiste, l'énergie W d'une particule est donnée en fonction de sa vitesse v ou de sa quantité de mouvement p par :

$$W = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2m} p^2,$$

ce qui correspond à un W toujours positif; mais en mécanique relativiste ces formules doivent être remplacées par :

$$W^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2,$$

ou

$$W = c \sqrt{m^2 c^2 + p^2},$$

ce qui permet à W d'être positif ou négatif.

On fait d'ordinaire l'hypothèse supplémentaire que l'énergie W doit toujours être positive. Cela est admissible en théorie classique où les grandeurs varient toujours de manière continue et où W ne peut par conséquent jamais passer d'une de ses valeurs positives, qui doit être $\geq mc^2$, à une de ses valeurs négatives qui doit être $\leq -mc^2$. Dans la théorie quantique, au contraire, une variable peut subir des changements discontinus, de sorte que W peut passer d'une valeur positive à une valeur négative.

Il n'a pas été possible de développer une théorie quantique relativiste de l'électron dans laquelle les transitions d'une valeur positive à une valeur négative de l'énergie soient exclues. Il n'est donc plus possible d'admettre que l'énergie est toujours positive sans qu'il en résulte des inconséquences dans la théorie.

Dans ces conditions, deux possibilités nous restent ouvertes. Ou bien nous devons trouver une signification physique pour les états d'énergie négative, ou bien nous devons admettre que la théorie quantique relativiste est inexacte dans la mesure où elle prévoit des transitions entre les états d'énergie positive et ceux d'énergie négative. Or de semblables transitions sont en général prévues pour tous les processus mettant en jeu des échanges d'énergie de l'ordre de mc^2 et il ne semble y avoir aucune raison de principe contre l'applicabilité de la mécanique quantique actuelle à de semblables échanges d'énergie. Il est vrai que cette mécanique ne semble pas pouvoir s'appliquer aux phénomènes dans lesquels interviennent des distances de l'ordre du rayon classique de l'électron $\frac{e^2}{mc^2}$, puisque la théorie actuelle ne peut en aucune façon rendre compte de la structure de l'électron, mais de telles distances, considérées comme longueurs d'onde électroniques, correspondent à des énergies de l'ordre $\frac{hc}{e^2} mc^2$, beaucoup plus grandes que les changements en question. Il semble donc que la solution la plus raisonnable est de chercher un sens physique pour les états d'énergie négative.

Un électron dans un état d'énergie négative est un objet tout à fait étranger à notre expérience, mais que nous pouvons cependant étudier au point de vue théorique; nous pouvons, en particulier, prévoir son mouvement dans un champ électromagnétique quelconque donné. Le résultat du calcul, effectué soit en mécanique classique, soit en théorie quantique, est qu'un électron d'énergie négative est dévié par le champ exactement comme le serait un électron d'énergie positive s'il avait une charge électrique positive $+e$ au lieu de la charge négative habituelle $-e$.

Ce résultat suggère immédiatement une assimilation entre l'électron d'énergie négative et le positron. On serait tenté d'admettre qu'un électron dans un état d'énergie négative constitue précisément un positron, mais cela n'est pas acceptable,

parce que le positron observé n'a certainement pas une énergie cinétique négative.

Nous pouvons obtenir un meilleur résultat en utilisant le principe d'exclusion de Pauli, en vertu duquel un état quantique donné ne peut être occupé par plus d'un électron. Admettons que dans l'Univers tel que nous le connaissons, les états d'énergie négative soient presque tous occupés par des électrons, et que la distribution ainsi obtenue ne soit pas accessible à notre observation à cause de son uniformité dans toute l'étendue de l'espace. Dans ces conditions, tout état d'énergie négative non occupé représentant une rupture de cette uniformité, doit se révéler à l'observation comme une sorte de lacune. Il est possible d'admettre que ces lacunes constituent les positrons.

Cette hypothèse résout les difficultés principales de l'interprétation des états d'énergie négative. Une lacune dans la distribution des électrons d'énergie négative représente une énergie positive, puisqu'elle correspond à un défaut local d'énergie négative. De plus, le mouvement de cette lacune dans un champ électromagnétique quelconque est exactement le même que celui de l'électron nécessaire pour combler la lacune. Nous pouvons tirer de là deux conclusions : d'abord que le mouvement de la lacune peut être représenté par une fonction d'onde de Schrödinger analogue à celle qui représente le mouvement d'un électron, et ensuite, que la lacune se comporte dans un champ de la même manière qu'un électron positif d'énergie positive. Ainsi la lacune prend exactement l'aspect d'une particule ordinaire électrisée positivement et son identification avec le positron se présente comme tout à fait plausible.

Si notre hypothèse est correcte, nous devons pouvoir en déduire un certain nombre de conséquences expérimentalement vérifiables. Tout d'abord, la masse du positron doit être exactement égale à celle de l'électron et sa charge doit être exactement égale et opposée à celle de l'électron. De plus nous pouvons prévoir certains résultats concernant la création et la disparition des positrons.

Un électron ordinaire d'énergie positive ne peut pas sauter dans l'un des états occupés d'énergie négative, en raison du principe de Pauli; il peut, au contraire, sauter dans une lacune pour la combler. Ainsi un électron et un positron peuvent se détruire

réciroquement. Leur énergie doit se retrouver sous forme de photons et il résulte des principes de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement que deux photons au moins doivent être produits. On peut calculer la probabilité pour qu'un tel processus ait lieu et obtenir ainsi la vie probable d'un positron se mouvant à travers une distribution donnée d'électrons. Le résultat est une vie moyenne de 3×10^{-7} sec pour un positron en mouvement lent dans l'air à la pression atmosphérique, cette durée moyenne augmentant avec la vitesse. La valeur ainsi obtenue est d'un ordre de grandeur compatible avec l'expérience, puisqu'elle est suffisante pour permettre à un positron rapide de traverser une chambre de condensation de Wilson sans y être en général détruit, et assez petite cependant pour que les positrons ne soient pas des objets communément présents au laboratoire.

Un électron et un positron peuvent s'annihiler réciproquement en donnant naissance à un seul photon si un noyau atomique est présent pour absorber la quantité de mouvement libérée. Le processus inverse consiste dans la production d'un positron et d'un électron par la rencontre d'un seul photon d'énergie suffisante avec un noyau atomique. On peut se le représenter comme un effet photo-électrique sur un des électrons d'énergie négative décrivant des orbites hyperboliques au voisinage du noyau; cet électron étant élevé vers un état d'énergie positive et apparaissant ainsi comme électron ordinaire, tandis qu'il laisse derrière lui une lacune se comportant comme un positron. La probabilité d'apparition d'un tel processus a été calculée approximativement par Oppenheimer et indépendamment par Peierls, et le résultat est d'un ordre de grandeur qui concorde avec les observations relatives à la production de positrons par des rayons γ durs tombant sur des noyaux lourds.

Pour que la conception que nous proposons des états d'énergie négative se développe en théorie complète, nous devons considérer non seulement le mouvement des électrons et des lacunes dans un champ, mais aussi la manière dont un champ électromagnétique est produit par les électrons et les lacunes. Pour cela, il est nécessaire d'introduire une hypothèse nouvelle puisque la conception ordinaire que chaque charge $-e$ sur un électron

contribue à produire la densité électrique ρ qui détermine le champ électrique \vec{E} conformément à l'équation de Maxwell :

$$(1) \quad \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$$

conduirait évidemment à un champ infini en tout point.

Faisons l'hypothèse que la distribution d'électrons dans laquelle aucun état d'énergie positive n'est occupé, tandis que tous les états d'énergie négative le sont ne produit aucun champ, et que ce sont les écarts à partir de cette distribution qui déterminent les champs conformément à l'équation (1). Dans cette hypothèse, un état d'énergie positive occupé produirait un champ correspondant à une charge négative $-e$ et un état d'énergie négative non occupé produirait un champ correspondant à une charge positive $+e$. Nous obtenons ainsi une nouvelle propriété des lacunes qui contribue à rendre vraisemblable notre assimilation de ces lacunes avec les positrons.

La nouvelle hypothèse est tout à fait satisfaisante lorsqu'il s'agit d'une région de l'espace où n'existe aucun champ, et où la distinction entre les états d'énergie positive et ceux d'énergie négative est nettement définie; mais elle doit être précisée lorsqu'il s'agit d'une région de l'espace où le champ électromagnétique n'est pas nul pour pouvoir conduire à des résultats libres de toute ambiguïté. Il faut spécifier mathématiquement quelle distribution d'électrons est supposée ne produire aucun champ et donner aussi une règle pour soustraire cette distribution de celle qui existe effectivement dans chaque problème particulier, de manière à obtenir une différence finie qui peut figurer dans (1), puisque, en général, l'opération mathématique de soustraction entre deux infinités est ambiguë.

Cette question n'a pas encore été examinée ni résolue pour le cas général d'un champ électromagnétique arbitraire. Il y a, cependant, un cas particulier dans lequel les hypothèses nécessaires semblent assez évidentes : celui d'un champ électrostatique permanent. Nous allons traiter ici ce cas, en supposant le champ suffisamment faible pour qu'une méthode de perturbation puisse être utilisée. Nous constaterons que la distribution qui ne produit aucun champ ne satisfait pas aux équations du mouvement. En

retranchant cette distribution de celle qui satisfait à ces équations et qui correspond à un état où ne sont présents ni électrons ni positrons, nous obtiendrons une différence qui pourra être interprétée physiquement comme un effet de polarisation par le champ électrique de la distribution normale des électrons d'énergie négative.

Nous emploierons la méthode d'approximation de Hartree-Fock qui attribue à chaque électron sa propre fonction d'onde individuelle $\psi(q)$, et nous introduirons la matrice densité R définie par

$$(q' | R | q'') = \sum_r \bar{\psi}_r(q') \psi_r(q''),$$

la sommation s'étendant à tous les électrons, c'est-à-dire à tous les états occupés. Toute distribution d'électrons peut être caractérisée par une semblable matrice, au degré de précision que comporte la méthode de Hartree-Fock. Cette représentation n'est pas relativiste puisque les valeurs q' , q'' des variables associées à un élément de la matrice R correspondent à deux points différents de l'espace, mais à un même instant. Néanmoins elle convient pour notre problème actuel.

L'équation de mouvement pour R est ⁽¹⁾ :

$$(2) \quad i\hbar \dot{R} = HR - RH,$$

où H est l'hamiltonien pour un électron mobile dans le champ :

$$H = c\rho_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) + \rho_3 mc^2 - eV,$$

les ρ et σ étant les matrices de spin habituelles et V le potentiel électrostatique. V doit contenir une partie représentant la contribution au champ des autres électrons présents. La condition pour que la distribution satisfasse au principe d'exclusion est

$$(3) \quad R^2 = R.$$

Représentons par R_0 la distribution qui est supposée ne produire

⁽¹⁾ Cf. DIRAC, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. 25, 1929, p. 62, et 26, 1930, p. 376.

aucun champ. L'hypothèse la plus immédiate pour R_0 est

$$(4) \quad R_0 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{W}{|W|} \right).$$

où W est l'énergie cinétique d'un électron :

$$W = c \rho_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) + \rho_3 mc^2.$$

Ceci signifie que, dans une représentation matricielle où W est diagonale, R_0 sera également diagonale et aura pour éléments diagonaux 0 ou 1 suivant que l'énergie W est positive ou négative. C'est l'énergie cinétique W qui doit figurer dans (4) et non l'énergie totale H parce que, dans ce dernier cas, l'expression (4) serait modifiée seulement par l'addition d'une constante au potentiel électrique V et ne pourrait par conséquent avoir aucune signification physique.

Considérons un état permanent pour lequel l'équation de mouvement (2) se réduit à :

$$(5) \quad 0 = HR - RH.$$

Cette équation n'est pas satisfaite par $R = R_0$ à moins que V ne soit une constante. Supposons que V soit une petite quantité du premier ordre et cherchons une solution de (3) et (5) de la forme $R = R_0 + R_1$ où R_1 soit une quantité du premier ordre. En négligeant les petites quantités du second ordre, l'équation (5) donne :

$$(6) \quad 0 = (W - eV)(R_0 + R_1) - (R_0 + R_1)(W - eV) \\ = WR_1 - R_1W - e(VR_0 - R_0V).$$

L'opérateur $|W|$ peut être défini comme la racine carrée positive de W^2 ou $m^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2$. Ainsi :

$$|W| = c(m^2 c^2 + \mathbf{p}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Si nous posons

$$\frac{W}{|W|} = \gamma,$$

nous avons

$$W = c\gamma(m^2 c^2 + \mathbf{p}^2)^{\frac{1}{2}}$$

et aussi

$$R_0 = \frac{1}{2}(1 - \gamma).$$

L'équation (6) peut, par conséquent, s'écrire :

$$(7) \quad \gamma(m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{\frac{1}{2}} R_1 - R_1 \gamma(m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{e}{c} (\gamma V - V \gamma).$$

L'équation (3) donne :

$$(R_0 + R_1)^2 = R_0 + R_1,$$

$$R_0 R_1 + R_1 R_0 = R_1,$$

qui se réduit à

$$\gamma R_1 + R_1 \gamma = 0.$$

En utilisant cette relation et l'équation $\gamma^2 = 1$, nous déduisons de (7), après multiplication des deux membres à gauche par γ :

$$(m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{\frac{1}{2}} R_1 + R_1 (m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{e}{c} (V - \gamma V \gamma).$$

La quantité qui nous intéresse est la densité électrique correspondant à la distribution R_1 . Pour l'obtenir, nous devons former la somme diagonale de R_1 , par rapport aux variables de spin et prendre ensuite l'élément diagonal général, multiplié par $-e$, de la matrice résultante par rapport aux variables de position x . Si D représente la somme diagonale par rapport aux variables de spin, nous avons, après un calcul simple :

$$\begin{aligned} & (m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{\frac{1}{2}} D(R_1) + D(R_1) (m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{e}{c} D(V - \gamma V \gamma) \\ &= 2 \frac{e}{c} \left\{ V - \frac{1}{(m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{\frac{1}{2}}} [(\mathbf{p}, V \mathbf{p}) + m^2c^2 V] \frac{1}{(m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{\frac{1}{2}}} \right\}. \end{aligned}$$

Si nous supposons maintenant l'emploi d'une représentation dans laquelle la matrice quantité de mouvement p est diagonale et si $(p' | D(R_1) | p'')$ désigne, dans ces conditions, l'élément général de la matrice $D(R_1)$, nous avons

$$\begin{aligned} & (m^2c^2 + p'^2)^{\frac{1}{2}} (p' | D(R_1) | p'') + (p' | D(R_1) | p'') (m^2c^2 + p''^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \frac{e}{c} (p' | V | p'') \left\{ 1 - \frac{1}{(m^2c^2 + p'^2)^{\frac{1}{2}}} [(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') + m^2c^2] \frac{1}{(m^2c^2 + p''^2)^{\frac{1}{2}}} \right\}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(8) \quad (p' | D(R_1) | p'') = 2 \frac{e}{c} (p' | V | p'') \frac{1 - \frac{(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') + m^2c^2}{(m^2c^2 + p'^2)^{\frac{1}{2}} (m^2c^2 + p''^2)^{\frac{1}{2}}}}{(m^2c^2 + p'^2)^{\frac{1}{2}} + (m^2c^2 + p''^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Nous pouvons maintenant transformer $D(R_1)$ dans une représentation pour laquelle les variables de position x sont diagonales et en calculer l'élément diagonal. En utilisant les lois habituelles de transformation, on obtient

$$(9) \quad (x | D(R_1) | x) = \frac{1}{h^3} \int \int e^{-i(\mathbf{x}, \mathbf{p}' - \mathbf{p}'')/h} (p' | D(R_1) | p'') dp' dp''.$$

Maintenant, puisque V n'est fonction que des variables de position x et pas des quantités de mouvement p , $(p' | V | p'')$ ne doit dépendre que de la différence $\mathbf{p}' - \mathbf{p}''$. Par suite, si nous substituons l'expression donnée par le second membre de (8) dans l'intégrale (9), et si nous prenons pour nouvelles variables d'intégration $\mathbf{p}' + \mathbf{p}''$ et $\mathbf{p}' - \mathbf{p}''$, nous pouvons effectuer l'intégration par rapport à $\mathbf{p}' + \mathbf{p}''$ en laissant V quelconque. Le résultat contient un infini logarithmique.

On pourrait croire, à première vue, que la présence de cet infini rend la théorie inacceptable. Cependant, nous ne pouvons pas supposer que la théorie s'applique lorsqu'il s'agit d'énergies supérieures à l'ordre de $137 mc^2$, et la manière de procéder la plus raisonnable semble être de limiter arbitrairement le domaine d'intégration à une valeur de la quantité de mouvement $\frac{1}{2}(\mathbf{p}' + \mathbf{p}'')$ correspondant à des énergies électroniques de l'ordre indiqué. Cela revient, physiquement, à admettre que la distribution concernant les électrons d'énergie négative inférieure à un niveau d'environ $-137 mc^2$ ne donne pas lieu à une polarisation par le champ électrique de la manière indiquée par notre théorie. La place exacte que nous attribuons à ce niveau d'énergie limite n'a pas grande importance puisque la valeur de ce niveau figure seulement dans un logarithme.

Si P est la grandeur du vecteur quantité de mouvement $\frac{1}{2}(\mathbf{p}' + \mathbf{p}'')$ à laquelle nous limitons le domaine d'intégration, le résultat final, obtenu après une intégration compliquée, est :

$$(10) \quad -e(x | D(R_1) | x) = -\frac{e^2}{\hbar c} \frac{2}{3\pi} \left(\log \frac{2P}{mc} - \frac{5}{6} \right) \rho \\ - \frac{4}{15\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \nabla^2 \rho,$$

où ρ est la densité électrique produisant le potentiel V , de sorte

que

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho,$$

et où les termes contenant les dérivées de ρ d'ordre supérieur au second ont été négligés.

Le second membre de (10) donne la densité électrique provenant de la polarisation produite par l'action du champ sur la distribution des électrons d'énergie négative. Le terme important est le premier qui, pour $\frac{P}{mc} = 137$, est sensiblement $-\frac{e^2}{\hbar c}\rho$ ou $-\frac{1}{137}\rho$. Ceci signifie qu'il n'y a de densité produite par polarisation que dans les endroits où se trouve située la densité ρ productrice du champ et que la densité induite y neutralise une fraction d'environ $\frac{1}{137}$ de la densité productrice du champ. Le second terme dans le second membre de (10) représente une correction importante seulement lorsque la densité ρ varie rapidement avec la position et change de manière appréciable sur une distance de l'ordre de $\frac{\hbar}{mc}$.

Comme conséquence du calcul précédent, il semblerait que les charges électriques normalement observées sur les électrons, protons ou autres particules électrisées ne sont pas les charges véritables portées par ces particules et figurant dans les équations fondamentales, mais sont légèrement plus petites dans le rapport d'environ 136 à 137. Pour des processus comportant des échanges d'énergie de l'ordre de mc^2 , il n'y aurait probablement pas le temps, cependant, pour que la polarisation des électrons d'énergie négative s'établisse de manière complète, de sorte qu'on doit s'attendre à ce que les charges observées soient plus voisines des charges réelles. Il en résulterait des déviations de l'ordre de 1 pour 100 dans des expressions telles que la formule de Klein-Nishina ou la formule de diffusion de Rutherford lorsque des énergies de l'ordre de mc^2 sont en jeu. Lorsque la vérification expérimentale de ces formules pourra être rendue suffisamment précise, on y trouvera un contrôle de l'exactitude de nos hypothèses sur le champ produit par la distribution des électrons d'énergie négative.