4. Rotations

a) $$R(\theta) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ +\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_z(\theta)} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & +\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}}_{R_y(\theta)}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta & -\sin\theta & +\sin\theta\cos\theta \\ +\sin\theta\cos\theta & \cos\theta & \sin^2\theta \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

b) $$R'(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & +\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ +\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & +\sin\theta \\ +\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ +\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$R'(\theta) \neq R(\theta)$ commute pas (généralement); sauf pour $\theta = \{0, \pi, 2\pi\}$

$\rightsquigarrow$ groupe de rotation non-abélien ($SO(3)$)

représentation de

c) $\theta = \frac{\pi}{2}$

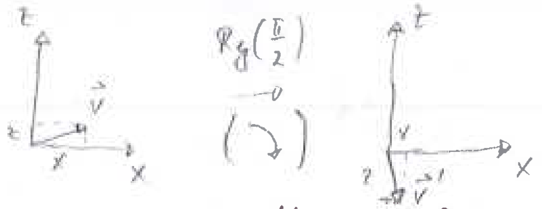
$$\Rightarrow R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$R_y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_z\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_y\left(\frac{\pi}{2}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +z \\ +y \\ -x \end{pmatrix}$$

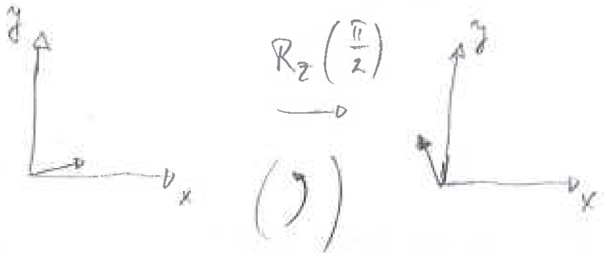


✓

par calcul

vérification graphique.

$$R_z\left(\frac{\pi}{2}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ +x \\ +z \end{pmatrix}$$



✓

6. Tenseurs

$$\underline{\underline{\delta}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cette matrice commute avec toute matrice, alors, comme

$$\underline{\underline{R}}^{-1}\,\underline{\underline{\delta}}\,\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{\delta}}\,\underbrace{\underline{\underline{R}}^{-1}\,\underline{\underline{R}}}_{=\mathbb{1}} = \underline{\underline{\delta}} \qquad \forall\,\underline{\underline{R}}$$

$$\Rightarrow (R^{-1})_{ia}\,\delta_{ab}\,R_{bj} = \delta_{ij}$$

et δ_{ij} se transforme comme tenseur de rang 2.