

Sciences du Numérique, Appliquées et Fondamentales
Année universitaire 2022-2023

Outils Mathématiques 1
Phys1-OM1
KPHXIA11 (semestre d'automne)
KPHXPA11 (semestre de printemps)

Fascicule de Cours-TD

Ce fascicule est associé aux Cours-TD d'Outils Mathématiques 1. Cette Unité d'Enseignement ne comporte pas de cours. Les notions fondamentales sont présentées en début de chacun des thèmes et seront reprises par votre enseignant.

Il est indispensable de s'inscrire au cours d'outils maths 1 sur moodle :

Tous les cours / 2022-2025 / FSI_Rentrée 2022 - 2023 / Sciences du Numérique, Appliquées, Fondamentales (SNAF) / Licence / Mention Physique / Niveau 1 / Outils mathématiques 1 - Automne - KPHXIA11 pour le semestre d'automne (et Outils mathématiques 1 - Printemps - KPHXPA11 pour le semestre de printemps). Vous y trouverez entre autres la version numérique du fascicule, les modalités de contrôle des connaissances, la liste des enseignants, etc.

Symbole		Nom
Minuscule	Majuscule	
α		alpha
β		beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ε		epsilon
ζ		zeta
η		eta
θ, ϑ	Θ	theta
κ		kappa
λ	Λ	lambda
μ		mu
ν		nu
ξ		xi ("ksi")
π	Π	pi
ρ		rho
σ	Σ	sigma
τ		tau
ϕ, φ	Φ	phi
χ		chi ("ki")
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	omega

D'autres notations utiles :

$\forall x$, quel que soit x ,

$\exists x$: il existe x tel que

$\exists! x$: il existe un unique x tel que

Chapitre 1 : dérivation de fonctions d'une seule variable réelle

Notations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On ne s'intéressera pas ici sur le caractère dérivable ou non de f . On utilise la notation f' pour désigner la fonction dérivée (appelée plus simplement «dérivée») de f par rapport à sa variable. Il est courant en physique d'utiliser la notation de Leibniz qui a l'avantage d'explicitier la variable de dérivation. Si f est une fonction de la variable x , alors on note :

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}f(x)$$

La notation « $\frac{d}{dx}$ » correspond à l'opérateur de dérivation qui est appliqué ci-dessus sur la fonction f . Si f est une fonction de la variable t , on écrirait plutôt $f'(t) = \frac{df}{dt}(t)$. En cinématique, on utilise souvent la notation $\dot{f}(t) = \frac{df}{dt}(t)$ et elle est réservée au cas où la variable est le temps t . Dans la partie cours de ce chapitre, la variable sera notée x mais dans la suite, il se peut que la variable soit t , voire un volume V ou une température T .

On peut calculer la dérivée seconde, troisième, etc. de f si f est dérivable 2 fois, 3 fois, etc. On note par exemple pour la dérivée seconde de f :

$$f''(x) = (f'(x))' = \frac{d}{dx} \frac{df}{dx}(x) = \frac{d^2f}{dx^2}f(x)$$

Dérivée de fonctions usuelles

On donne ci-dessous l'expression de dérivées qu'il faut absolument (re)connaître. $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_{f'}$ sont respectivement les ensembles de définition de f et de f' .

Fonction f	$\mathcal{D}_f$	Dérivée $f' = \frac{df}{dx}$	$\mathcal{D}_{f'}$
$ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a	$\mathbb{R}$
x^n avec $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ avec $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{*+}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\mathbb{R}^{*+}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$

Remarque : Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut retenir la dérivée des fonctions $x \mapsto x^n$, $x \mapsto 1/x^n$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ via une seule formule :

$$(x^\alpha)' = \frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

car le cas $x \mapsto x^n$ est obtenu avec $\alpha = n$, le cas $x \mapsto 1/x^n$ avec $\alpha = -n$ et le cas $x \mapsto \sqrt{x}$ avec $\alpha = 1/2$.

Dérivée de somme ou produit de fonctions

Ci-dessous, u et v sont deux fonctions de la variable réelle x dérivables.

Fonction	Dérivée
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
$ku(x)$ pour $k \in \mathbb{R}$	$ku'(x)$
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$\frac{1}{u(x)}$ avec $u(x) \neq 0$	$-\frac{u'(x)}{u(x)^2}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $v(x) \neq 0$	$\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

Dérivée de fonctions composées

Soit f une fonction de la variable réelle x . On suppose que g est une fonction d'une seule variable et qu'on peut calculer $g[f(x)]$. On note $g[f(x)] = (g \circ f)(x)$. On dit que $g \circ f$ est une fonction composée. Sa dérivée par rapport à x est donnée par :

$$(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \times f'(x) = g'[f(x)] \times f'(x)$$

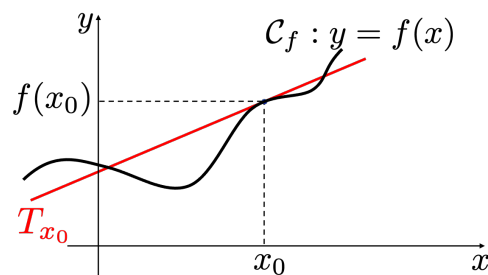
Exemples (on supposera que les valeurs de $u(x)$ permettent de calculer $\sqrt{u(x)}$ ou $\ln[u(x)]$, etc.) :

Fonction	Dérivée
$u^n(x) = (u(x))^n$ pour $n \in \mathbb{N}$	$nu^{n-1}(x) u'(x)$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\ln[u(x)]$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$\sin[u(x)]$	$u'(x) \cos[u(x)]$
$\cos[u(x)]$	$-u'(x) \sin[u(x)]$

Tangente à une courbe représentative

Pour f une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative (aussi appelée graphe de f) la courbe d'équation $y = f(x)$. Pour $x_0 \in I$, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0 , notée T_{x_0} , est la droite qui a pour équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



Extrema d'une fonction

Soit f une fonction de la variable réelle x deux fois dérivable. Soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$ tel que $f'(x_0) = 0$. Le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ est alors :

- un minimum de f si $f''(x_0) > 0$;
- un maximum de f si $f''(x_0) < 0$;
- un point d'inflexion si $f''(x_0) = 0$.

1.1 Calcul de dérivées

Dans les questions ci-dessous, a , b , ω et φ sont des constantes réelles quelconques. Calculer la dérivée des fonctions proposées.

- 1) $f_1(x) = 2x^3$ $f_2(x) = \ln(x-1)$ $f_3(x) = e^{-x}$ $f_4(x) = \sin(4x)$ $f_5(x) = \sqrt{2} \cos(3x)$
- 2) $g_1(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}$ $g_2(x) = \frac{x}{(a+x)^2}$ $g_3(x) = x^2 \sin x$ $g_4(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ $g_5(x) = x^2 e^x$
- 3) $h_1(x) = \cos^2 x$ $h_2(x) = \sqrt{ax+b}$ $h_3(x) = e^{-x^2/a^2}$ $h_4(x) = \ln(x^2+x+a)$ $h_5(t) = \cos(\omega t + \varphi)$

1.2 Tangente à une courbe représentative

Soit la fonction f de la variable t définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(t) = f_0 \exp(-t/\tau) \end{aligned}$$

où f_0 et τ sont des constantes réelles strictement positives. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f .

- 1) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$. En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$ dont on donnera l'équation cartésienne.
- 2) Déterminer la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $t = 0$ (qu'on appelle aussi «tangente à l'origine»).
- 3) Tracer qualitativement $\mathcal{C}_f$, l'asymptote déterminée à la question 2 et la tangente à l'origine.

1.3 Extrema d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{15} - 10x - \frac{10}{x}$.

- 1) f admet-elle un extremum sur $]0, +\infty[$? Si oui, déterminer si c'est un minimum ou un maximum.
- 2) Même question sur $] -\infty, 0[$.

Chapitre 2 : intégration de fonctions d'une variable réelle

Définition de la primitive d'une fonction continue

Si f est une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ alors elle admet une primitive sur I , notée F . On a donc $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$. On peut alors en déduire toutes les primitives de f qui sont les fonctions $x \mapsto F(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. Il en existe une infinité car C est quelconque. Si on impose une certaine valeur à F en un x donné, alors la primitive devient unique.

La primitive d'une somme de fonctions est la somme des primitives : si F et G sont respectivement des primitives de f et g alors une primitive de $x \mapsto f(x) + g(x)$ est $x \mapsto F(x) + G(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Vous pouvez rencontrer l'écriture suivante pour une primitive de f : $\int f(x)dx = F(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. Elle est cependant abusive car sous le signe intégral, x étant une variable muette, elle ne peut donc pas apparaître comme étant la variable de la primitive F . Nous vous déconseillons très fortement d'utiliser ce genre d'écriture.

Primitives de fonctions usuelles

Dans le tableau ci-dessous, on rappelle les primitives de fonctions usuelles qu'il faut absolument (re)connaître. I est l'intervalle sur lequel la fonction f est définie et C est une constante réelle quelconque.

Fonction f	F , primitive de f	Intervalle I
a avec $a \in \mathbb{R}$	$ax + C$	$\mathbb{R}$
x^n avec $n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \neq 1$	$-\frac{1}{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + C$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{2}{3} x^{3/2} + C$	$\mathbb{R}^+$
$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$	$2\sqrt{x} + C$	$\mathbb{R}^{*+}$
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$\mathbb{R}^*$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\mathbb{R}$

Rem. : Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut retenir l'expression d'une primitive des fonctions $x \mapsto x^n$, $x \mapsto 1/x^n$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto 1/\sqrt{x}$ via une seule formule :

$$\text{Primitive de } x \mapsto x^\alpha : \quad x \mapsto \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha \neq -1$$

car le cas $x \mapsto x^n$ est obtenu avec $\alpha = n$, le cas $x \mapsto 1/x^n$ avec $\alpha = -n$, le cas $x \mapsto \sqrt{x}$ avec $\alpha = 1/2$ et le cas $x \mapsto 1/\sqrt{x}$ avec $\alpha = -1/2$.

Primitives de fonctions composées

Le tableau ci-dessous est essentiellement le même que celui du chapitre 1 sur la dérivée de fonctions composées mais présenté autrement. C est une constante réelle quelconque. On supposera que les valeurs de u permettent de calculer $\sqrt{u(x)}$ ou $\ln[u(x)]$, etc.

Fonction	Primitive
$u'(x) (u(x))^n$ pour $n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1} (u(x))^{n+1} + C$
$\frac{u'(x)}{(u(x))^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \neq 1$	$-\frac{1}{(n-1)} \frac{1}{(u(x))^{n-1}} + C$
$u'(x) \sqrt{u(x)}$	$\frac{2}{3} (u(x))^{3/2} + C$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + C$
$u'(x) e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + C$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) + C$
$u'(x) \cos[u(x)]$	$\sin[u(x)] + C$
$u'(x) \sin[u(x)]$	$-\cos[u(x)] + C$

On notera que, pour permettre le calcul d'une primitive d'une fonction composée sans outil analytique supplémentaire (intégration par parties, changement de variables, etc.), il est indispensable d'avoir en facteur $u'(x)$ dans la fonction à intégrer. Une vérification du calcul d'une primitive F de f est de dériver la fonction F obtenue et de vérifier que $F'(x) = f(x)$. Cela permet notamment d'identifier les facteurs numériques qui apparaissent dans le calcul d'une primitive.

Intégrales de fonctions continues

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et F une primitive de f sur I . Alors l'intégrale de f sur un intervalle $[a, b] \subset I$ s'écrit :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

La notation $[F(x)]_a^b$ signifie $F(b) - F(a)$. Alors qu'une primitive est une fonction, une intégrale est un nombre.

La variable d'intégration sous le signe intégral est une variable dite muette. On peut en effet écrire :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy = \int_a^b f(\xi) d\xi$$

Il faut donc prendre soin d'identifier la variable par rapport à laquelle on intègre, indiquée par l'élément dx (par exemple x est la variable d'intégration s'il y a un dx) et la dépendance analytique de la fonction qu'on intègre (notée ici f) par rapport à la variable d'intégration.

Interprétation géométrique d'une intégrale : pour f fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est l'«aire sous la courbe» c'est-à-dire l'aire délimitée par les droites $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et $\mathcal{C}_f$,

courbe représentative de f d'équation $y = f(x)$. Cette aire est algébrique : elle est comptée positivement si elle est dans le demi-plan $y \geq 0$, et négativement sinon.

Intégration par parties

Soient u' et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$. On a :

$$\int_a^b u'(x)v(x) \, dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) \, dx$$

On remarquera que c'est la même relation que $(uv)' = u'v + uv'$ qu'on a écrite $u'v = (uv)' - uv'$ et qu'on a intégrée.

2.1 Calcul de primitives usuelles

Calculer une primitive des fonctions ci-dessous.

$$\begin{array}{lll} 1) f(x) = 2x^2 + 3x - 1 & 2) f(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} & 3) f(x) = (x-2)(x+1) \\ 4) f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} & 5) f(x) = 3e^x & 6) f(x) = \sqrt{2}\cos x - \sin x \end{array}$$

2.2 Calcul de primitives uniques

- 1) Déterminer la primitive de $x \mapsto \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$ qui s'annule en $x = 1$.
- 2) Déterminer la primitive de $x \mapsto 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ qui vaut 1 en $x = 4$.

2.3 Calcul de primitives de fonctions composées

- 1) Soit $k \in \mathbb{R}^*$. Calculer une primitive des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} f_1(x) = (kx-1)^2 & f_2(x) = \frac{1}{kx+1} & f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}} \\ f_4(x) = e^{-kx} & f_5(t) = \sqrt{2}\cos(\omega t) & f_6(t) = \sin(\omega t + \varphi) \end{array}$$

- 2) Calculer une primitive des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{llll} g_1(x) = (4x+3)(2x^2+3x)^5 & g_2(x) = \frac{2}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 & g_3(x) = \frac{4x+3}{(2x^2+3x)^5} & g_4(x) = xe^{-x^2} \\ g_5(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x} & g_6(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} & g_7(x) = \sin x \cos^2 x & g_8(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \end{array}$$

2.4 Calcul d'intégrales

- 1) Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} I_1 = \int_0^1 (2x^2 + 3x - 1) \, dx & I_2 = \int_{-1}^1 3e^x \, dx & I_3 = \int_0^{\pi/2} (\sqrt{2}\cos t - \sin t) \, dt \\ I_4 = \int_0^{\pi/(2\omega)} \sqrt{2}\cos(\omega t) \, dt & I_5 = \int_0^4 xe^{-x^2} \, dx & I_6 = \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \, dx \end{array}$$

- 2) Calculer les intégrales suivantes et les comparer aux primitives calculées dans l'exercice **2.2** :

$$\int_1^x \left(\frac{3}{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt \quad \text{pour } x > 1 \quad , \quad \int_4^x \left(2\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt \quad \text{pour } x > 4$$

- 3) Calculer l'intégrale $I = \int_1^2 \sqrt{x} dx$. Tracer la courbe représentative de la fonction racine et donner l'interprétation géométrique de I .

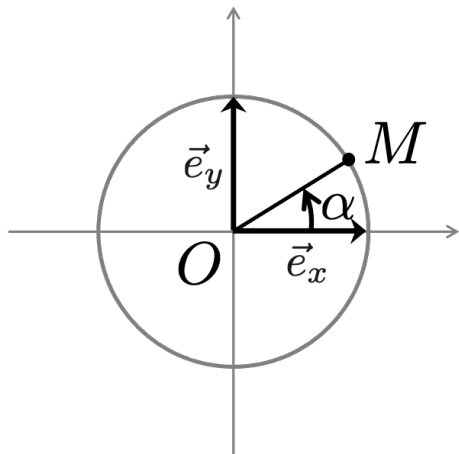
2.5 Intégration par parties

- 1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer l'intégrale $\int_0^a x e^{-x} dx$.
- 2) Pour $x > 0$, calculer l'intégrale $\int_1^x \ln t dt$.
- 3) On cherche à calculer $I = \int_1^e x \ln x dx$. Par intégration par parties et en utilisant le résultat de la question précédente, établir une équation sur I . Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de I .

Chapitre 3 : Manipulations de vecteurs dans le plan et l'espace

3.1 Trigonométrie

Dans le plan usuel muni du repère $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, le **cercle trigonométrique** est un cercle de rayon 1, de centre O et orienté dans le sens anti-horaire (sens trigonométrique).



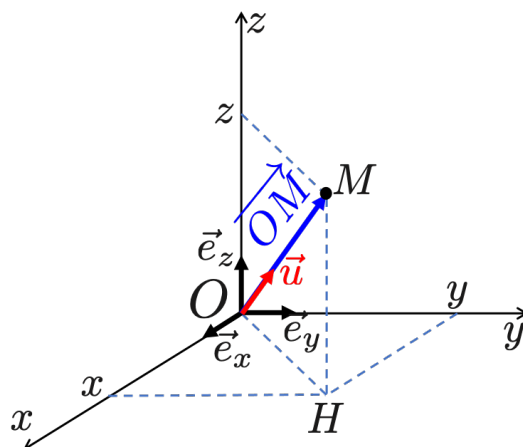
- 1) Définir les coordonnées d'un point M du cercle trigonométrique en complétant le schéma ci-contre. Ajouter l'axe des tangentes et $\tan \alpha$. Placer $\tan(\alpha + \pi)$.
- 2) En utilisant le cercle trigonométrique, rappeler les valeurs de $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ pour $\alpha = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ et π . En déduire $\tan \alpha$.
- 3) En utilisant le cercle trigonométrique, vérifier que :

$$\begin{aligned}\cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha\end{aligned}$$

3.2 Repérage cartésien dans l'espace

Dans l'espace, on considère le **repère cartésien** $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, représenté sur la figure ci-contre. Les trois vecteurs $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ sont linéairement indépendants (on dit aussi libres ou non liés) : aucun d'entre eux n'est une combinaison linéaire des deux autres. On dit alors que le triplet de vecteurs $\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ forme une base de l'espace. De plus, chacun de ces vecteurs est de norme 1 (on dit aussi unitaire) et ils sont deux à deux orthogonaux. On parle alors de base **orthonormée**. Enfin, les vecteurs sont positionnés comme sur la figure, c'est-à-dire $\vec{e}_x$ vers vous, $\vec{e}_y$ vers votre droite et $\vec{e}_z$ vers le haut. Cette orientation relative fait que la base est **directe**. Cette notion sera précisée à la section 3.5.



À un point M de l'espace, on peut associer le vecteur-position $\overrightarrow{OM}$. Les grandeurs réelles x , y et z sont les **coordonnées cartésiennes** du point M dans le repère cartésien $\mathcal{R}$ mais aussi les **composantes cartésiennes** du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne $\mathcal{B}$. On utilisera les notations suivantes :

$$\begin{array}{c|c} M & \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \\ \hline \mathcal{R} & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c|c} \overrightarrow{OM} & \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \\ \hline \mathcal{B} & \end{array} = \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

On indique pour le point M le repère $\mathcal{R}$ dans lequel on exprime ses coordonnées cartésiennes en bas à gauche de l'écriture en colonne. On indique pour le vecteur $\overrightarrow{OM}$ la base $\mathcal{B}$ dans lequel on exprime ses composantes cartésiennes en bas à gauche de l'écriture en colonne. Cette écriture en colonne est équivalente à l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ qui exprime $\overrightarrow{OM}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B}$. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on pourra noter, pour gagner de la place, les

coordonnées cartésiennes du point M sous la forme d'un triplet, $M(x, y, z)$, et les composantes cartésiennes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ également sous forme de triplet (x, y, z) .

La **norme** du vecteur $\overrightarrow{OM}$ vaut $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Le **vecteur unitaire** $\vec{u}$ porté par la droite (OM) , dans le même sens que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ (cf. figure de la page précédente), s'écrit : $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$.

Par construction, sa norme vaut 1.

3.2.1 Exercice d'application

Dans le repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, on considère trois points dont on donne les coordonnées cartésiennes ci-après : $M_1(2, 3, 4)$, $M_2(-2, -4, -1)$ et $M_3(2, 0, 1)$.

- 1) Représenter sur un schéma 3D le repère cartésien et les 3 points. Dans quel plan se trouve le point M_3 ?
- 2) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM_2}$ sous forme de vecteur-colonne puis de combinaison linéaire de $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$. Même question pour le vecteur $\overrightarrow{M_1M_3}$.
- 3) Déterminer $\vec{u}$, vecteur unitaire de mêmes direction et sens que $\overrightarrow{OM_2}$.
- 4) Soit M_4 le point tel que $\overrightarrow{M_3M_4} = -2\vec{e}_x + \vec{e}_y$. Déterminer les coordonnées cartésiennes de M_4 . À quel plan appartient-il ?

3.3 Produit scalaire de deux vecteurs

Soient les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$. On note leurs composantes cartésiennes dans la base cartésienne $\mathcal{B}$ par :

$$\overrightarrow{OM_1} = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM_2} = \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Le **produit scalaire** $\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2}$ de ces deux vecteurs est le **scalaire** (ici, un nombre réel) donné par :

$$\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = \|\overrightarrow{OM_1}\| \times \|\overrightarrow{OM_2}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}})$$

La notation $\cdot$ sera réservée au produit scalaire entre deux vecteurs et ne devra donc pas être utilisée pour indiquer la multiplication entre 2 nombres afin d'éviter toute confusion.

Le produit scalaire est commutatif : $\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_2} \cdot \overrightarrow{OM_1}$.

3.3.1 Détermination de l'angle entre deux vecteurs

Soient A et B deux points de l'espace muni du repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On donne les coordonnées cartésiennes $A(1 + \sqrt{3}, \sqrt{3} - 1, 0)$ et $B(2, 2, 0)$.

- 1) Dans quel plan se trouvent les points A et B ? Les représenter sur un schéma. On prendra $\sqrt{3} \simeq 1,73$.
- 2) Calculer les normes $\|\overrightarrow{OA}\|$ et $\|\overrightarrow{OB}\|$.
- 3) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.
- 4) Dédire des deux questions précédentes la valeur absolue de l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. D'après le schéma, quel est le signe de cet angle ?

3.3.2 Projection orthogonale et produit scalaire

On munit le plan du repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$. On considère trois points A , B et C de coordonnées cartésiennes respectives $(-4, -3)$, $(6, 2)$ et $(0, 4)$ dans $\mathcal{R}$.

- 1) Représenter sur un schéma $\mathcal{R}$, les points A , B et C , ainsi que le vecteur $\vec{AH}$, projection orthogonale du vecteur $\vec{AC}$ sur le vecteur $\vec{AB}$.
- 2) Exprimer le produit scalaire $\vec{AC} \cdot \vec{AB}$ en fonction des normes de $\vec{AC}$ et $\vec{AB}$. En déduire une expression de ce produit scalaire en fonction des normes de $\vec{AH}$ et $\vec{AB}$ et calculer la norme de $\vec{AH}$.
- 3) Exprimer le vecteur $\vec{AH}$ en fonction de $\vec{AB}$. En déduire les coordonnées du point H .

3.4 Produit vectoriel de deux vecteurs

Soient les vecteurs $\vec{OM_1}$ et $\vec{OM_2}$. On note leurs composantes cartésiennes dans la base cartésienne $\mathcal{B}$ comme :

$$\vec{OM_1} = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad \vec{OM_2} = \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Le **produit vectoriel** de $\vec{OM_1}$ par $\vec{OM_2}$, noté $\vec{OM_1} \wedge \vec{OM_2}$, est le **vecteur** dont les composantes cartésiennes sont données par :

$$\vec{OM_1} \wedge \vec{OM_2} = \begin{vmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Il existe au moins 3 méthodes pour calculer les composantes cartésiennes d'un produit vectoriel. Par exemple, on peut utiliser celle basée sur la règle « gamma/gamma inversé/gamma » dans laquelle on «cache» successivement une ligne :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \wedge = \begin{vmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ - \\ - \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \wedge^{-1} = \begin{vmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ x_2 z_1 - z_2 x_1 \\ - \end{vmatrix} \quad \text{« gamma inversé »}$$

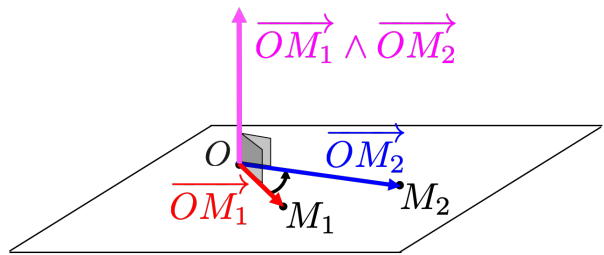
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \wedge^+ = \begin{vmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ x_2 z_1 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{vmatrix}$$

La second méthode est très proche : il n'y a pas inversion du gamma pour la deuxième composante mais on se souviendra qu'il faut multiplier par (-1) . La règle est donc « +gamma/-gamma/+gamma ».

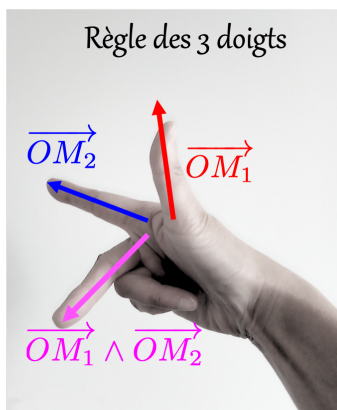
La troisième méthode nécessite d'écrire des lignes en plus et est décrite sur wikipedia : https://fr.wikipedia.org/wiki/Produit_vectoriel#/media/Fichier:Technique_de_calcul_du_produit_vectoriel.gif

Le produit vectoriel n'est pas commutatif : $\vec{OM_1} \wedge \vec{OM_2} = -(\vec{OM_2} \wedge \vec{OM_1})$, comme on peut le vérifier sur les composantes données ci-dessus.

Le produit vectoriel permet d'orienter l'espace, comme illustré dans la figure ci-contre. En effet, on considère le plan qui passe par les trois points O , M_1 et M_2 (ce plan existe toujours car trois points sont toujours coplanaires). Ce plan contient donc les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$. Alors le produit vectoriel $\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}$ est perpendiculaire à ce plan (cf. angles droits indiqués en gris sur la figure). En particulier, il est **orthogonal** à $\overrightarrow{OM_1}$ et à $\overrightarrow{OM_2}$. Le sens de $\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}$ permet de définir le demi-espace qui est au-dessus de ce plan (et donc également le demi-espace qui est en-dessous).



Il existe plusieurs moyens mnémotechniques pour trouver rapidement l'orientation du produit vectoriel.



Les images ci-contre vous montrent deux d'entre elles. L'important est de toujours utiliser sa main **droite**. Par exemple, avec la paume de la main droite, sur l'exemple montré dans le schéma de la page précédente, on pose la tranche de sa main droite sur $\overrightarrow{OM_1}$ et on balaie avec l'**intérieur** de la paume l'angle pour aller de $\overrightarrow{OM_1}$ vers $\overrightarrow{OM_2}$ (cf. angle orienté indiqué sur le schéma ci-dessus). Alors le pouce indique le sens du produit vectoriel $\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}$. Avec la règle des 3 doigts, le pouce représente $\overrightarrow{OM_1}$, l'index $\overrightarrow{OM_2}$ et le majeur $\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}$.

La **norme** du produit vectoriel est donnée par :

$$\|\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}\| = \|\overrightarrow{OM_1}\| \times \|\overrightarrow{OM_2}\| \times \left| \sin \left(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}} \right) \right|.$$

Géométriquement, cette norme vaut l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$.

3.4.1 Détermination de l'angle entre deux vecteurs

On munit l'espace du repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Soient A et B deux points de l'espace de coordonnées cartésiennes respectives $(1 + \sqrt{3}, \sqrt{3} - 1, 0)$ et $(2, 2, 0)$.

- 1) Calculer les composantes cartésiennes de $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$.
- 2) Vérifier que ce produit vectoriel n'est pas commutatif.
- 3) Suivant quelle direction ce produit vectoriel est-il ? Pourquoi était-ce prévisible ?
- 4) Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
- 5) À partir de la norme de $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$, quelles sont les valeurs possibles de l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$? Comparer aux valeurs obtenues dans l'exercice **3.3.1**.

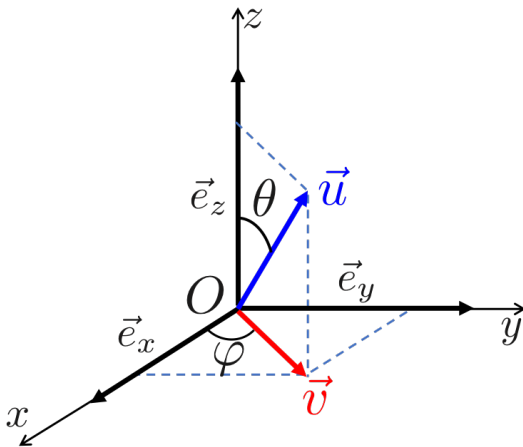
3.4.2 Aire de parallélogrammes

L'espace est muni du repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

- 1) Soient les deux vecteurs $\overrightarrow{OA} = 2\vec{e}_x$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{e}_x + \vec{e}_y$. Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
- 2) Même question avec les vecteurs $\overrightarrow{OA'} = 2\vec{e}_x - 3\vec{e}_y$ et $\overrightarrow{OB'} = 4\vec{e}_x - 6\vec{e}_y$.

3.4.3 Projection orthogonale d'un vecteur unitaire de l'espace

L'espace est muni du repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Soit un vecteur $\vec{u}$ unitaire et non colinéaire à $\vec{e}_z$. On définit le vecteur $\vec{v}$ comme le projeté de $\vec{u}$ sur le plan (Oxy) . On considérera que les angles θ et φ sont entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ comme sur le schéma ci-dessous.



- 1) Exprimer le vecteur $\vec{v}$ en fonction de $\|\vec{v}\|$ et φ dans la base associée au repère $\mathcal{R}$.
- 2) Exprimer le vecteur $\vec{u}$ en fonction de $\vec{v}$, $\vec{e}_z$ et θ .
- 3) Exprimer le vecteur $\vec{u}$ dans la base associée au repère $\mathcal{R}$ en fonction de $\|\vec{v}\|$, φ et θ .
- 4) Exprimer la norme de $\vec{u}$ en utilisant la question précédente. En déduire la norme de $\vec{v}$.
- 5) Calculer le produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.
- 6) Exprimer l'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ en utilisant les questions précédentes.

3.4.4 Produit scalaire, produit vectoriel et formules trigonométriques

On munit l'espace du repère orthonormé direct $\mathcal{R} (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On considère sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon unité deux points M et N tels que $\alpha = (\widehat{\vec{e}_x, \vec{OM}})$ et $\beta = (\widehat{\vec{e}_x, \vec{ON}})$.

- 1) Expliciter $\vec{OM}$ et $\vec{ON}$ dans la base associée au repère $\mathcal{R}$.
- 2) Calculer le produit scalaire $\vec{OM} \cdot \vec{ON}$. En déduire l'expression de $\cos(\alpha - \beta)$. En déduire l'expression de $\cos(\alpha + \beta)$.
- 3) Calculer le produit vectoriel $\vec{OM} \wedge \vec{ON}$. En déduire l'expression de $\sin(\alpha - \beta)$. En déduire l'expression de $\sin(\alpha + \beta)$.
- 4) Dédire des résultats précédents une expression de $\cos \alpha \cos \beta$ ne faisant pas intervenir de produits de cosinus ou de sinus.

3.5 Bases orthonormées directes

Une famille de 3 vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ forme une base de l'espace si et seulement s'ils sont linéairement indépendants. De plus, on dit qu'elle est **orthonormée directe** si et seulement si :

$$\begin{cases} \text{Chaque vecteur est } \mathbf{unitaire} \\ \text{Les 3 vecteurs sont deux à deux } \mathbf{orthogonaux} \\ \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \end{cases}$$

Remarques :

- On a aussi les relations $\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$ et $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1$.
- La base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est orthonormée directe.
- On dit d'un repère muni d'une base orthonormée directe qu'il est lui aussi orthonormé direct.

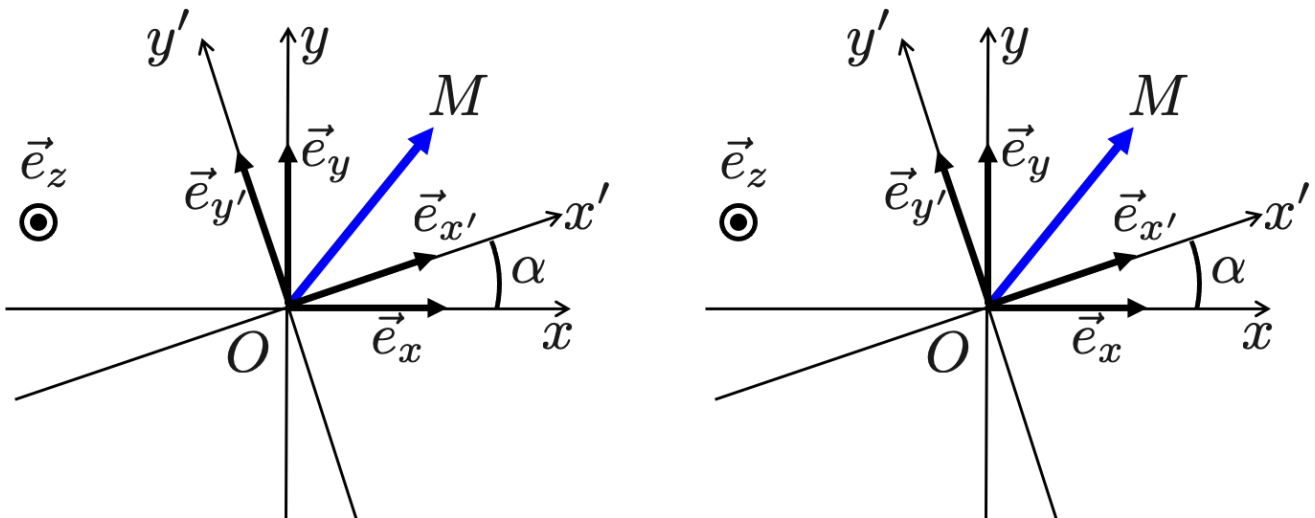
3.5.1 Détermination d'une base orthonormée directe

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de composantes cartésiennes respectives $(1/3, 2/3, 2/3)$ et $(2/3, -2/3, 1/3)$ dans la base cartésienne $\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

- 1) Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires et orthogonaux.
- 2) Déterminer les composantes du vecteur unitaire $\vec{w}$ pour que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormée directe.

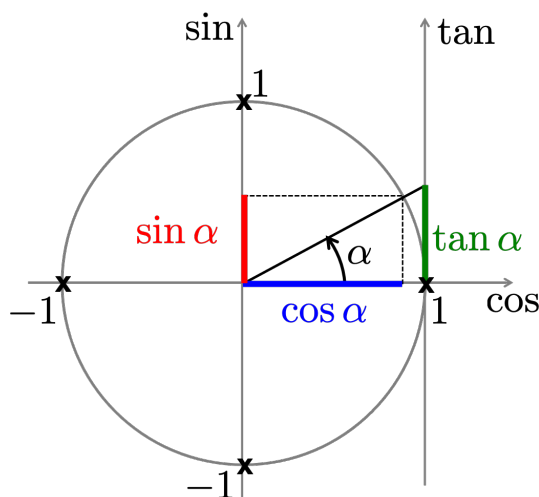
3.5.2 Rotation d'une base orthonormée directe

On considère la base cartésienne $\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et on en effectue une rotation d'angle $\alpha > 0$ autour de l'axe z . On obtient ainsi une autre base orthonormée directe $\mathcal{B}' = (\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_z)$. On notera que les troisièmes vecteurs de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont identiques : c'est le vecteur $\vec{e}_z$, symbolisé par $\odot$ sur les schémas ci-dessous (ils sont identiques) qui montrent $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ en projection dans le plan (Oxy) .



- 1) Tracer sur le schéma de gauche les projections adéquates pour exprimer les vecteurs $\vec{e}_{x'}$ et $\vec{e}_{y'}$ dans la base $\mathcal{B}$ en fonction de l'angle α entre les vecteurs $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_{x'}$.
- 2) Sur le schéma de droite, tracer les projections qui permettent d'exprimer les vecteurs $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ dans la base $\mathcal{B}'$ en fonction de l'angle α .
- 3) Calculer les produits scalaires $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_{x'}$ et $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_{y'}$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Conclure.
- 4) Le point M a pour coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et (x', y', z') dans le repère $\mathcal{R}' = (O, \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_z)$. On a $z' = z$. Exprimer x' et y' en fonction de x, y et α .

Fonctions trigonométriques sur le cercle trigonométrique



Moyens mnémotechniques pour retenir les 2 formules trigonométriques de base

«cos = coco - sisi» ce qui veut dire $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
 et on en déduit $\cos(a - b)$ en remarquant que c'est égal à $\cos(a + (-b))$

«sin = sico + cosi» ce qui veut dire $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
 et on en déduit $\sin(a - b)$ en remarquant que c'est égal à $\sin(a + (-b))$

Il faut absolument connaître ces 2 relations de base. Toutes les autres formules trigonométriques données ci-dessous sont aussi à connaître. Mais elles peuvent se déduire de ces 2 relations de base et/ou de l'utilisation du cercle trigonométrique.

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\begin{aligned}\cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \cos(2\alpha) &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(a - b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a - b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \sin(2\alpha) &= 2 \sin \alpha \cos \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos a \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)] \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin a \sin b &= \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)] \\ \cos a \sin b &= \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)]\end{aligned}$$

Chapitre 4 : Repérages dans l'espace et systèmes de coordonnées

Dans le chapitre précédent, on a exclusivement travaillé dans le repérage cartésien. Cependant, suivant la symétrie du problème, il est souvent plus judicieux d'utiliser d'autres repérages car les calculs peuvent alors être plus commodes à mener. Deux exemples sont particulièrement importants : le repérage cylindrique et le repérage sphérique.

4.1 Repérage cylindrique

On considère le repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ dans lequel un point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) . On note H la projection orthogonale du point M sur le plan (Oxy) . Le point M peut aussi être repéré par le triplet cylindrique (ρ, φ, z) défini par :

$$\rho = OH \quad , \quad \varphi = \widehat{(\vec{e}_x, \vec{OH})} \quad , \quad z = \overline{HM}$$

On appelle **base cylindrique** la base orthonormée directe $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ dans laquelle :

- $\vec{e}_\rho = \frac{\vec{OH}}{\|\vec{OH}\|}$ (l'angle $\widehat{(\vec{e}_x, \vec{e}_\rho)}$ est donc égal à φ)
- $\vec{e}_\varphi$ est tel que $\widehat{(\vec{e}_x, \vec{e}_\varphi)} = \varphi + \frac{\pi}{2}$
- $\vec{e}_z$ est le même qu'en cartésien

L'orientation de l'espace donnant le signe de l'angle φ est fixée par la direction du vecteur $\vec{e}_z$ et la règle des 3 doigts de la main droite. La base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ est une base **locale** (on dit aussi mobile ou tournante) car elle dépend du point M considéré, contrairement à la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ qui est une base **fixe** (les vecteurs de cette base ne changent pas quand M se déplace). Le repère cylindrique associé au point M est $(M, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$.

4.1.1 Repérage polaire

Un cas particulier du repérage cylindrique est le cas où $z = 0$. On travaille alors dans le plan (Oxy) et on parle de base polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$.

Soit un point H du plan. Il est repéré soit par ses coordonnées cartésiennes (x, y) , soit par ses coordonnées polaires (ρ, φ) .

- 1) Représenter sur un schéma le point H , ses coordonnées cartésiennes et polaires, ainsi que les deux bases $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$.
- 2) Déterminer les relations entre (x, y) et (ρ, φ) et *vice versa*.
- 3) Exprimer les vecteurs de la base polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ en fonction des vecteurs de la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$.
- 4) Déterminer les composantes polaires du vecteur $\vec{OH}$, c'est-à-dire les composantes dans la base locale $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$. Que devient cette base locale lorsqu'on fait varier ρ en maintenant φ constante ? Même question quand on fait varier φ en maintenant ρ constant.
- 5) Soient H_A et H_B deux points du plan de coordonnées cartésiennes respectives $(1, 1)$ et $(-1, 1)$. Faire un schéma avec le repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, les deux points H_A et H_B , ainsi que les bases polaires associées à chacun de ces deux points. Déterminer les composantes polaires des vecteurs $\vec{OH}_A$ et $\vec{OH}_B$. Conclure.
- 6) Soit H_C le point de coordonnées polaires $\rho_C = 2$ et $\varphi_C = \pi/3$. Placer ce point sur le schéma précédent. Déterminer ses coordonnées cartésiennes x_C et y_C .

4.1.2 Relations entre repérages cartésien et cylindrique

Soit M un point quelconque de l'espace et H sa projection orthogonale sur le plan (Oxy) .

- 1) Représenter sur un schéma les deux bases $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ en faisant apparaître clairement les points M et H ainsi que x, y, z, ρ et φ .
- 2) Donner les relations entre (x, y, z) et (ρ, φ, z) et *vice versa*.
- 3) Exprimer les vecteurs de la base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ en fonction des vecteurs de la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
- 4) Donner les composantes du vecteur $\vec{OM}$ dans la base locale $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$. Que devient cette base locale lorsqu'on fait varier z en maintenant ρ et φ constants ? Même question quand on fait varier ρ en maintenant φ et z constants, et enfin quand on fait varier φ en maintenant ρ et z constants.
- 5) Soient A et B deux points de l'espace de coordonnées cartésiennes respectives $(1, 1, 1)$ et $(-1, 1, 1)$. Faire un schéma avec les points A, B et les bases cylindriques associées à chacun de ces deux points. Donner les composantes cylindriques des vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$. Conclure.

4.2 Repérage sphérique

On considère le repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ dans lequel un point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) . On note H la projection orthogonale du point M sur le plan (Oxy) . Le point M peut être repéré par le triplet sphérique (r, θ, φ) défini par :

$$r = OM \quad , \quad \theta = \left(\vec{e}_z, \vec{OM} \right) \quad , \quad \varphi = \left(\vec{e}_x, \vec{OH} \right)$$

L'angle θ est orienté et varie entre 0 et π . L'angle φ est aussi orienté et il varie entre 0 et 2π .

On appelle **base sphérique** la base orthonormée directe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ dans laquelle :

- $\vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{||\vec{OM}||}$
- $\vec{e}_\varphi$ est identique au vecteur $\vec{e}_\varphi$ de la base cylindrique
- $\vec{e}_\theta$ est tel que $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ soit une base orthonormée directe

En conséquence, $(\vec{e}_z, \vec{e}_\theta) = \theta + \pi/2$. La base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ est une base **locale** car elle dépend du point M considéré. Le repère sphérique associé au point M est $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.

- 1) Représenter sur un schéma les deux bases $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ en faisant apparaître clairement les points M et H ainsi que r, θ et φ .
- 2) Donner les relations entre (ρ, φ, z) et (r, θ, φ) .
- 3) Donner les relations entre (x, y, z) et (r, θ, φ) et vice-versa.
- 4) Donner les composantes du vecteur $\vec{OM}$ dans la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$. Que devient cette base locale lorsque le point M se déplace ?
- 5) Application numérique : Faire un schéma avec le point A et la base sphérique associée à A . Calculer le triplet sphérique (r, θ, φ) associé au point A , défini dans l'exercice 4.1.2 , et en déduire les composantes de $\vec{OA}$ dans la base sphérique associée à A . Mêmes questions pour le vecteur $\vec{OB}$ dans la base sphérique associée à B . Conclure.

4.3 Changement de base

- 1) Soit le point M de coordonnées (x, y, z) dans le repère cartésien. Il est repéré par le triplet cylindrique (ρ, φ, z) et par le triplet sphérique (r, θ, φ) . Faire un schéma dans lequel sont représentés les vecteurs unitaires de ces trois bases.
- 2) Faire un schéma dans le plan $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_z)$ et y positionner $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$. Faire un schéma dans le plan $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et y positionner $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$.
- 3) En utilisant ces schémas, exprimer les vecteurs de la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ en fonction des vecteurs de la base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$.
- 4) En déduire en utilisant les résultats de la question 3 de l'exercice **4.1.2**, les expressions des vecteurs de la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ en fonction des vecteurs de la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Chapitre 5 : Nombres complexes et signaux sinusoïdaux

Les nombres complexes sont utilisés dans de nombreux domaines de la physique. Le but de ce chapitre est de vous familiariser aux manipulations algébriques des nombres complexes et d'introduire une utilisation utile notamment en électrocinétique.

5.1 Nombres complexes, plan complexe

Dans le chapitre 3, on a abondamment utilisé l'addition de deux vecteurs et la multiplication d'un scalaire réel par un vecteur. Par exemple, pour deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ du plan, muni du repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, et pour un scalaire $k \in \mathbb{R}$, on a :

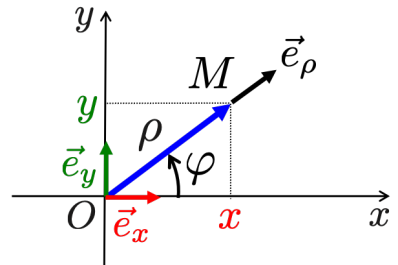
$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}, \quad k \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix}$$

Le plan (Oxy) est aussi parfois noté $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$. Dans le chapitre 3, on a manipulé des vecteurs 2D (mais aussi 3D) et non des couples de nombres réels. Si on transpose ce qui est écrit plus haut pour la somme de 2 vecteurs ou la multiplication d'un vecteur par un scalaire réel à des éléments de $\mathbb{R}^2$, on écrirait :

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad , \quad k(x_1, y_1) = (kx_1, ky_1)$$

L'objectif de ce chapitre est de maîtriser des manipulations non pas sur $\mathbb{R}^2$ mais sur $\mathbb{C}$, ensemble des **nombres complexes**. Fondamentalement, la manipulation algébrique de nombres complexes peut souvent se transposer à des manipulations sur des couples de réels ou sur des vecteurs 2D.

On a vu dans l'exercice 4.1.1 du chapitre 4 les relations entre les coordonnées (x, y) dans un repérage cartésien et (ρ, φ) dans un repérage polaire. Un point M du plan est repéré soit par ses coordonnées (x, y) ou (ρ, φ) , soit par les composantes du vecteur $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = \rho\vec{e}_\rho$.



On peut construire $\mathbb{C}$ en utilisant les coordonnées cartésiennes d'un point du plan et en écrivant :

$$\mathbb{C} = \{x + iy / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

où i est un nombre complexe tel que $i^2 = -1$. On peut aussi rencontrer la notation $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$. On appelle $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs. Dans cette notation, $\mathbb{R}$ correspond à l'axe des x et $i\mathbb{R}$ à l'axe des y .

On peut de façon équivalente définir $\mathbb{C}$ en utilisant les coordonnées polaires d'un point du plan :

$$\mathbb{C} = \{\rho e^{i\varphi} / \rho \in \mathbb{R}^+, \varphi \in \mathbb{R}\}$$

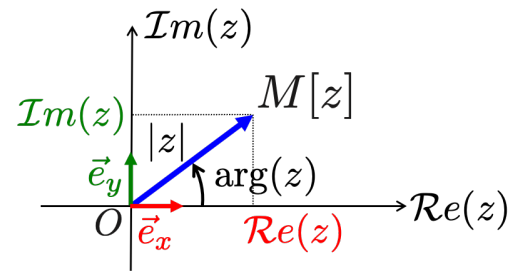
On a ici introduit l'**exponentielle d'un nombre complexe imaginaire pur** défini par (la justification fait l'objet d'un exercice) :

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Dans ce chapitre, au lieu de travailler avec un couple de **2 nombres réels**, (x, y) ou (ρ, φ) , on va manipuler **1 seul nombre complexe**, traditionnellement noté z (attention à ne pas confondre avec la troisième coordonnée cartésienne z qui n'intervient pas ici) et relié à (x, y) ou (ρ, φ) par $z = x + iy = \rho e^{i\varphi}$. On définit les termes suivants :

- x est la **partie réelle** de z et on note $\mathcal{Re}(z) = x$;
- y est la **partie imaginaire** de z et on note $\mathcal{Im}(z) = y$;
- ρ est le **module** de z et on note $|z| = \rho$;
- φ est l'**argument** de z et on note $\arg(z) = \varphi$.

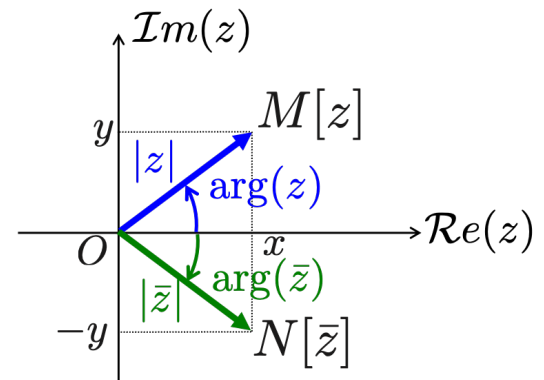
Ces définitions se retrouvent en comparant le schéma ci-contre, à comparer à la figure de la page précédente.



Au lieu de parler du plan (Oxy) ou du plan $\mathbb{R}^2$, on parlera plutôt du plan complexe $\mathbb{C}$ dont l'axe horizontal est l'axe des parties réelles et l'axe vertical celui des parties imaginaires. On dit qu'un point M de coordonnées cartésiennes (x, y) ou polaires (ρ, φ) a pour **affixe** le nombre complexe $z = x + iy = \rho e^{i\varphi}$. Dans le plan complexe, on note " $M[z]$ ". L'affixe de O , origine du repère cartésien, est le nombre complexe 0.

De la même manière qu'on peut définir les composantes cartésiennes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ comme $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ à partir de (x_A, y_A) et de (x_B, y_B) , coordonnées cartésiennes respectivement du point A et du point B , on peut définir l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ comme $z_B - z_A$ si z_A et z_B sont respectivement les affixes des points A et B . Comme l'affixe de O est 0, on a alors le fait que z , affixe du point M , est aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

On définit enfin l'opération de conjugaison d'un nombre complexe. Si $z = x + iy$ alors le **complexe conjugué** de z , noté $\bar{z}$ (ou parfois z^*), est défini par $\bar{z} = x - iy$. Si z est l'affixe d'un point M du plan complexe, alors $\bar{z}$ est l'affixe du point N , symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses (cf. figure ci-contre).



Le tableau ci-dessous résume les notions et les propriétés à connaître sur les nombres complexes. La démonstration de certaines propriétés se fera au cours des exercices de ce chapitre.

Forme algébrique	$z = x + iy$	$x = \mathcal{Re}(z)$, partie réelle de z $y = \mathcal{Im}(z)$, partie imaginaire de z
Forme exponentielle	$z = z e^{i\arg(z)}$	$ z = OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$, module de z $\arg(z) = \varphi$ rad, argument de z (à 2π près)
Forme trigonométrique	$z = z [\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z))]$	$\cos(\arg(z)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $\sin(\arg(z)) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
Complexe conjugué de z : $\bar{z} = x - iy = z e^{-i\arg(z)} = z [\cos(\arg(z)) - i \sin(\arg(z))]$ Module de z : $ z = \bar{z} = \sqrt{z\bar{z}}$		

Remarques :

- En électrocinétique, pour ne pas confondre le nombre imaginaire i (tel que $i^2 = -1$) avec l'intensité dans un circuit électrique, ce nombre imaginaire est souvent noté j au lieu de i . Cependant, dans cette UE, nous garderons la notation standard i .
- Si $x \neq 0$, on a $\tan(\arg(z)) = y/x$, ce qui permet de déterminer $\arg(z)$ mais **à π près**, par exemple avec $\arg(z) \in]-\pi/2; \pi/2[$. Pour déterminer $\arg(z)$ à 2π près, la connaissance de $\tan(\arg(z))$ ne suffit pas, il

faut connaître en plus $\sin(\arg(z))$ ou $\cos(\arg(z))$. Autrement dit, pour déterminer $\arg(z)$ à 2π près, on doit connaître son sinus et son cosinus, ou son sinus et sa tangente, ou encore son cosinus et sa tangente.

- En électrocinétique, bien souvent, la partie réelle des nombres complexes qui interviennent est strictement positive. Si z est un nombre complexe dans le problème, on a donc souvent

$$\operatorname{Re}(z) > 0 \Rightarrow \cos(\arg(z)) > 0 \Rightarrow \arg(z) \in]-\pi/2; \pi/2[$$

Alors on peut déterminer de façon unique $\arg(z)$ en utilisant $\tan(\arg(z)) = y/x$ puisqu'on sait que $\arg(z)$ est dans un intervalle de longueur π .

5.1.1 Propriétés générales sur les nombres complexes

Dans cet exercice, nous allons démontrer des propriétés générales sur les nombres complexes, en partant aussi bien de la forme algébrique, exponentielle ou trigonométrique d'un nombre complexe.

- 1) Soit z un nombre complexe. En utilisant la forme algébrique de z , démontrer les égalités suivantes : $\overline{\overline{z}} = z$, $|z| = |-z| = |\overline{z}|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad |\alpha z| = |\alpha| \times |z|$, $z\overline{z} = |z|^2$. Montrer que $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.
- 2) Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes quelconques. En utilisant la forme algébrique de z_1 et z_2 , déterminer la forme algébrique de $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ et z_1/z_2 . Démontrer les égalités suivantes : $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$, $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$.
- 3) Soit z un nombre complexe. En utilisant la forme algébrique de z , démontrer que $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$. En déduire que $\overline{\overline{z}} = z \iff z \in \mathbb{R}$ et $\overline{z} = -z \iff z \in i\mathbb{R}$.
- 4) Soit z un nombre complexe de module 1. Pourquoi peut-on l'écrire $z = \exp[i \arg(z)]$? En utilisant la forme trigonométrique d'un nombre complexe, expliquer pourquoi on a $z = \exp[i(\arg(z) + 2\pi)]$ et que l'on peut donc se contenter de donner l'argument d'un nombre complexe dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ ou dans l'intervalle $] - \pi, \pi]$.
Pour chacun des arguments suivants, déterminer le nombre complexe de module 1 correspondant : 0 , $\pi/2$, π , $-\pi/2$.
- 5) Soit $\varphi \in \mathbb{R}$. En utilisant la forme trigonométrique d'un nombre complexe, démontrer que $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$ et $\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$.
Démontrer que $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}$. En déduire que pour z un nombre complexe non nul quelconque, $\arg(\overline{z}) = \arg(1/z) = -\arg(z)$.
- 6) Soient φ_1 et φ_2 deux nombres réels quelconques. En utilisant la forme trigonométrique de $e^{i\varphi_1}$ et $e^{i\varphi_2}$, calculer $e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2}$ et comparer le résultat à la forme trigonométrique de $e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ (on utilisera le fait que $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$). En déduire que $e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$, $\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$. Démontrer que pour z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls quelconques, on a à 2π près, $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

5.1.2 Manipulations algébriques de nombres complexes

On considère les nombres complexes définis par $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = z_1/z_2$ et $z_4 = z_1 + z_2$.

- 1) Déterminer la forme algébrique de z_3 et de z_4 .
- 2) Mettre z_1 et z_2 sous forme exponentielle. En déduire les formes exponentielle et trigonométrique de z_3 .
- 3) En comparant les résultats des questions précédentes, en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
- 4) Placer les points M_1 , M_2 , M_3 et M_4 d'affixe respectif z_1 , z_2 , z_3 et z_4 dans le plan (Oxy) .
- 5) Sans faire le calcul explicite, comment peut-on déduire graphiquement $|z_1 + z_2|$ et $\arg(z_1 + z_2)$?

5.1.3 Rotation et nombre complexe

Dans l'exercice **3.5.2** du chapitre 3, vous avez déterminé les relations entre les composantes cartésiennes (x, y) d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne $\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ aux composantes (x', y', z) de ce même vecteur mais exprimées dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_z)$, cette base étant obtenue à partir de $\mathcal{B}$ par une rotation d'un angle α autour de l'axe Oz . On va ici oublier la composante z et ne travailler que dans le plan (Oxy) .

Considérons ici $\overrightarrow{OM'}$, vecteur obtenu à partir du vecteur $\overrightarrow{OM}$ par une rotation d'angle α et de centre O .

- 1) On note z et z' respectivement l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et celui du vecteur $\overrightarrow{OM'}$. En utilisant les résultats de la question 4 de l'exercice **3.5.2**, démontrer qu'on a $z' = e^{i\alpha}z$.
- 2) Application : soit M le point de coordonnées cartésiennes $(1, 1)$. Déterminer les formes algébrique et exponentielle de z , affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$. On considère la rotation d'angle $\pi/2$ et de centre O . Déterminer les formes algébrique et exponentielle de z' , affixe du vecteur $\overrightarrow{OM'}$ obtenu à partir de $\overrightarrow{OM}$ par cette rotation. En déduire les coordonnées cartésiennes et polaires du point M' .

5.1.4 Linéarisation de puissances de fonctions trigonométriques

Le but de cet exercice est d'utiliser les exponentielles complexes pour linéariser $\sin^2 \varphi$ et $\sin^4 \varphi$, c'est-à-dire pour les exprimer comme des combinaisons linéaires de $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, $\sin(2\varphi)$, $\cos(2\varphi)$, etc. Pour cela, on rappelle la formule du binôme de Newton :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} \quad \text{avec} \quad C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- 1) Exprimer explicitement la formule du binôme de Newton pour $n = 2$ avec a et b deux nombres complexes quelconques. Exploiter le résultat obtenu pour linéariser $\sin^2 \varphi$ en utilisant $\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$. On rappelle aussi que $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$.
Vérifier la validité de la relation obtenue pour $\varphi = \pi/4$ et $\varphi = \pi/2$.
- 2) Exprimer explicitement la formule du binôme de Newton pour $n = 4$ avec a et b deux nombres complexes quelconques. Exploiter le résultat obtenu pour linéariser $\sin^4 \varphi$. Vérifier la validité de la relation obtenue pour $\varphi = \pi/4$ et $\varphi = \pi/2$.
- 3) Pour illustrer l'utilité de linéariser la puissance d'une fonction trigonométrique, on va calculer la valeur moyenne de la fonction $t \mapsto \sin^2(\omega t)$ sur une période $T = 2\pi/\omega$ où ω un réel strictement positif. Il existe plusieurs notations pour la valeur moyenne d'une fonction f , comme $\overline{f(t)}$. Cependant, cette notation n'est pas la plus judicieuse ici, à cause de l'ambiguïté avec le complexe conjugué. Nous noterons donc la valeur moyenne de f sur une période de T par $\langle f(t) \rangle_T$. Celle-ci vaut par définition :

$$\langle f(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

- 1) Calculer la valeur moyenne $\langle \sin^2(\omega t) \rangle_T$.
- 2) Pourquoi $\langle \cos^2(\omega t) \rangle_T$ donne-t-il le même résultat ?

5.2 Signaux sinusoïdaux et représentation complexe

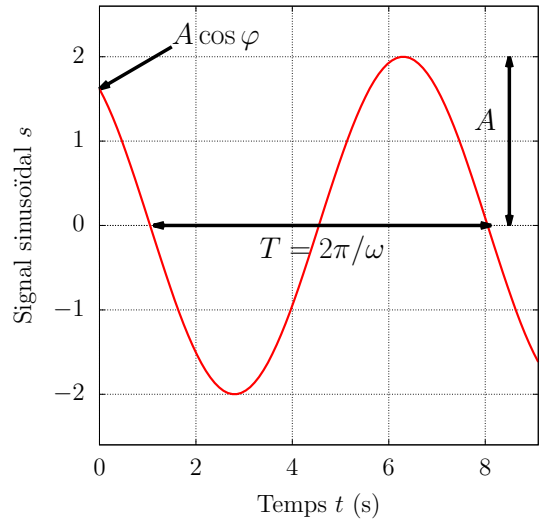
Forme générique d'un signal sinusoïdal réel

Soit s une grandeur physique (tension ou intensité électrique, position d'une masse accrochée à un ressort, etc.) dont la dépendance temporelle est sinusoïdale. À un instant t donné, on l'écrit sous la forme :

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

avec $A > 0$ est l'**amplitude**, $\omega > 0$ la **pulsation** et $\varphi \in \mathbb{R}$ la **phase à l'origine** du signal sinusoïdal. La connaissance de ces trois constantes caractérisent complètement $s(t)$. L'angle $\omega t + \varphi$ est appelé «phase de s à l'instant t ».

La figure ci-contre montre un exemple de signal sinusoïdal tel qu'on peut le voir sur l'écran d'un oscilloscope, avec sur l'axe des abscisses le temps t et sur l'axe des ordonnées s . On y a indiqué comment on peut lire graphiquement A , $T = 2\pi/\omega$ et $A \cos \varphi$.

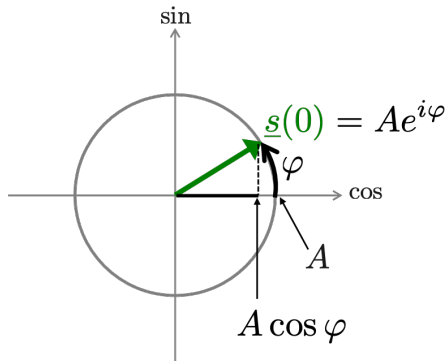


$s(t)$ est ici un nombre réel car il correspond à une grandeur physique réelle, mesurable avec un appareil de mesure. À cette grandeur réelle, on associe le **signal complexe** $\underline{s}(t)$ obtenu en remplaçant $\cos(\omega t + \varphi)$ par $\exp[i(\omega t + \varphi)]$:

$$\underline{s}(t) = Ae^{i(\omega t + \varphi)} \quad , \quad s(t) = \text{Re}[\underline{s}(t)] = A \cos(\omega t + \varphi) \quad .$$

Représentation de Fresnel d'un signal sinusoïdal

$\underline{s}(t)$ peut être vu comme l'affixe d'un vecteur dans le plan complexe : c'est la représentation de Fresnel d'un signal sinusoïdal.



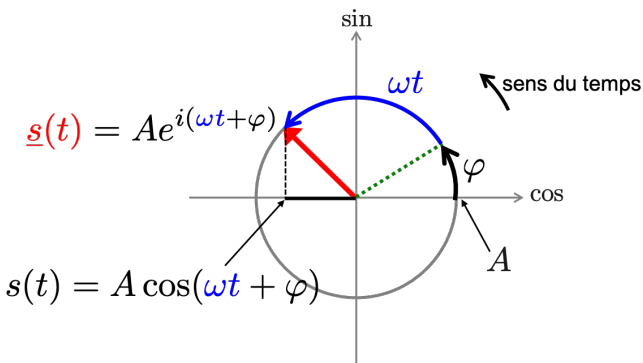
Dans la figure de gauche en haut, on a représenté le vecteur d'affixe $\underline{s}(0)$ (flèche verte). Le module de $\underline{s}(0)$ vaut l'amplitude A et l'angle que fait le vecteur vert avec l'axe des abscisses est la phase à l'origine φ . La projection du vecteur vert sur l'axe des abscisses donne $A \cos \varphi$.

Dans la figure en bas, le vecteur d'affixe $\underline{s}(t)$ (flèche rouge) est obtenu à partir du vecteur d'affixe $\underline{s}(0)$ par une rotation de centre O et d'angle ωt . En effet, comme $e^{a+b} = e^a e^b \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$, on a :

$$\underline{s}(t) = Ae^{i(\omega t + \varphi)} = Ae^{i\varphi} e^{i\omega t} = \underline{s}(0) e^{i\omega t}$$

Et l'on a vu dans l'exercice 1.3 que multiplier un nombre complexe par $e^{i\alpha}$ correspond à une rotation de centre O et d'angle α . Ainsi, quand t augmente, l'extrémité du vecteur d'affixe $\underline{s}(t)$ décrit le cercle de centre O et de rayon A .

La projection de la flèche rouge sur l'axe des abscisses donne $A \cos(\omega t + \varphi)$ qui est précisément le signal réel $s(t)$.



Dans l'écriture $\underline{s}(t) = \underline{s}(0) e^{i\omega t}$, on voit que la dépendance temporelle, à savoir $e^{i\omega t}$, s'est factorisée. Ainsi, pour connaître $\underline{s}(t)$, il suffit de connaître $\underline{s}(0)$ et de multiplier ce dernier par $e^{i\omega t}$.

Pour alléger les notations, on note souvent le nombre complexe $\underline{s}(0)$ simplement $\underline{A}$, qu'on appelle naturellement **amplitude complexe** du signal complexe $\underline{s}(t)$:

$$\underline{s}(t) = \underline{A} e^{i\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{A} = A e^{i\varphi}$$

$\underline{A}$ est ici écrite sous sa forme exponentielle pour $\underline{A}$ avec :

$$\text{l'amplitude } A = |\underline{A}| \quad \text{et la phase à l'origine } \varphi = \arg(\underline{A}) \quad .$$

Comme la partie réelle d'une somme de nombres complexes est la somme des parties réelles, si on additionne plusieurs signaux sinusoïdaux, on additionne également leurs représentations complexes :

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + \dots \iff \underline{s}(t) = \underline{s}_1(t) + \underline{s}_2(t) + \underline{s}_3(t) + \dots$$

Intérêt de la représentation complexe de signaux sinusoïdaux

L'utilité de passer en grandeurs complexes concerne par exemple l'aspect temporel. En effet, si tous les signaux sinusoïdaux dans un problème donné ont la même pulsation ω , on introduit les signaux complexes de façon à factoriser la partie temporelle, qui s'écrira toujours $e^{i\omega t}$, on manipule des amplitudes complexes, c'est-à-dire juste des nombres, on réinjecte la dépendance temporelle en multipliant par $e^{i\omega t}$ et l'on revient enfin aux grandeurs réelles (puisque ce sont elles que l'on mesure) en prenant la partie réelle à la fin du calcul. Des exemples concrets seront vus dans les exercices ci-dessous mais aussi dans la résolution d'équations différentielles (chapitre 6).

5.2.1 Représentation complexe de signaux sinusoïdaux

On considère les grandeurs sinusoïdales suivantes, de même pulsation ω :

$$s_1(t) = 2\sqrt{3} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right), \quad s_2(t) = -2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right), \quad s_3(t) = -\frac{5}{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right), \quad s_4(t) = \cos(\omega t) + \sqrt{3} \sin(\omega t).$$

- 1) Pour $i = 1, \dots, 4$, mettre ces expressions sous la forme $s_i(t) = A_i \cos(\omega t + \varphi_i)$ pour en déduire les amplitudes (réelles et positives) A_i et les phases à l'origine φ_i de chacun des signaux ci-dessus.

Indication : pour $s_1(t)$ à $s_3(t)$, transformer les expressions en cosinus en utilisant les propriétés des fonctions cos et sin vues dans le chapitre 3; pour $s_4(t)$, développer $A_4 \cos(\omega t + \varphi_4)$ avec la formule $\cos(a+b)$ et identifier terme à terme les deux expressions de $s_4(t)$.

- 2) En déduire l'expression des amplitudes complexes $\underline{A}_i$ des signaux complexes $\underline{s}_i(t)$.

5.2.2 Combinaison linéaire de signaux sinusoïdaux

Soient les 2 signaux périodiques s_1 et s_2 , de même pulsation ω , tels que :

$$s_1(t) = -\frac{3}{2} \cos\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right) \quad \text{et} \quad s_2(t) = -2 \sin\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right)$$

- 1) Après avoir écrit les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sous la forme $s_i(t) = A_i \cos(\omega t + \varphi_i)$, exprimer, sous forme trigonométrique puis exponentielle, les grandeurs complexes $\underline{s}_1(t)$, $\underline{s}_2(t)$, associées à $s_1(t)$ et $s_2(t)$.
- 2) En déduire les amplitudes complexes $\underline{A}_1$ et $\underline{A}_2$ de $\underline{s}_1(t)$ et $\underline{s}_2(t)$.
- 3) Montrer que pour obtenir l'amplitude complexe $\underline{A}$ associée à $\underline{s}(t) = \underline{s}_1(t) - \underline{s}_2(t)$, il suffit de soustraire les amplitudes complexes et qu'on a donc $\underline{A} = \underline{A}_1 - \underline{A}_2$. Représenter $\underline{A}_1$, $\underline{A}_2$ et $\underline{A}$ dans le plan complexe.
- 4) Calculer $\underline{A}$ en privilégiant la forme, algébrique ou exponentielle, la plus adaptée pour réaliser une addition.
- 5) Calculer l'amplitude $|\underline{A}|$ et l'argument $\arg(\underline{A})$ de $\underline{A}$. Expliquez pourquoi, dans ce cas particulier, la valeur de $|\underline{A}|$ aurait pu se calculer plus simplement (à partir du graphique).
- 6) En déduire la forme exponentielle de $\underline{s}(t)$, puis $s(t)$, la grandeur sinusoïdale (réelle) associée à $\underline{s}(t)$.

5.2.3 Tension triphasée

Le principe d'une tension (ou d'un courant) triphasée est le suivant : au lieu de n'utiliser qu'une seule tension électrique sinusoïdale d'amplitude $U\sqrt{2}$ ⁴ et de pulsation ω , on considère la somme de trois tensions sinusoïdaux de mêmes amplitude et pulsation mais déphasés deux à deux de $2\pi/3$. Soient donc u_1 , u_2 et u_3 trois tensions associées à une tension triphasée de pulsation ω et de même amplitude $U\sqrt{2}$:

$$u_1(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t) \quad , \quad u_2(t) = U\sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \quad , \quad u_3(t) = U\sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right) \quad .$$

Le but de cet exercice est de manipuler d'une part des relations trigonométriques et d'autre part la représentation complexe de signaux sinusoïdaux pour montrer l'intérêt du courant triphasé. Pour cela, on considère $u_{\text{tot}}(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$ et $u_{12}(t) = u_1(t) - u_2(t)$.

- 1) En utilisant l'une des formules trigonométriques de base, simplifier l'expression de $u_{\text{tot}}(t)$.
- 2) Pour $i = 1, 2, 3$, associer à $u_i(t)$ la grandeur complexe $\underline{u}_i(t) = \underline{U}_i e^{i\omega t}$ et donner l'expression de $\underline{U}_i$ en fonction de U et π .
- 3) Soit $\underline{u}_{\text{tot}}(t)$ la grandeur complexe associée à $u_{\text{tot}}(t)$. Montrer que l'amplitude complexe $\underline{U}_{\text{tot}}$ de $\underline{u}_{\text{tot}}(t)$ est égale à $\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3$. En déduire l'expression de $\underline{U}_{\text{tot}}$ en fonction de U et π .

En utilisant la relation classique donnant la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

en déduire la valeur de $\underline{U}_{\text{tot}}$ en prenant $q = e^{2i\pi/3}$ et $n = 2$. Comparer au résultat de la question 1).

- 4) Représenter dans le plan complexe les 3 vecteurs dont les affixes sont les $\underline{U}_i$. Construire graphiquement la somme de ces 3 vecteurs. En déduire la valeur de $\underline{U}_{\text{tot}}$. Comparer au résultat de la question 1).
- 5) Soit $\underline{u}_{12}(t) = \underline{U}_{12} e^{i\omega t}$ la grandeur complexe associée à $u_{12}(t) = u_1(t) - u_2(t)$. Donner la relation entre $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_1$ et $\underline{U}_2$, puis entre $\underline{U}_{12}$, U et π . Construire graphiquement $\underline{U}_{12}$ et comparer $|\underline{U}_{12}|$ à U . Montrer graphiquement que $\arg(\underline{U}_{12}) = -\pi/6$.
- 6) En utilisant le fait que $1 - e^{2i\pi/3} = e^{i\pi/3}(e^{-i\pi/3} - e^{i\pi/3})$ et que $e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i \sin \varphi$, montrer que $\underline{u}_{12}(t) = U\sqrt{3}\sqrt{2}e^{-i\pi/6}e^{i\omega t}$. En déduire l'expression de la tension $u_{12}(t)$ et comparer son amplitude à celle des tensions de départ $u_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. Conclure. En prenant $U = 220$ V et $\sqrt{3} \simeq 1,73$, montrer que la tension $u_{12}(t)$ a une amplitude (divisée par $\sqrt{2}$) égale à $\simeq 380$ V.

5.2.4 Dérivée et intégration d'un signal sinusoïdal en représentation complexe

Soit s un signal sinusoïdal d'amplitude A , de pulsation ω et de phase à l'origine φ . On note $\underline{s}(t)$ le signal complexe associé.

- 1) Rappeler comment s'écrivent $s(t)$ et $\underline{s}(t)$. On introduira $\underline{A}$, amplitude complexe de $\underline{s}(t)$.
- 2) Calculer $\frac{ds}{dt}(t)$ et en déterminer l'amplitude complexe, qu'on notera $\underline{B}$. Quel est le lien entre $\arg(\underline{B})$ et $\arg(\underline{A})$? Comment obtient-on dans le plan complexe le vecteur d'affixe $\underline{B}$ à partir du vecteur d'affixe $\underline{A}$?
- 3) Calculer une primitive de $\underline{s}(t)$. On considère dans la suite la primitive qui est aussi un signal complexe de pulsation ω . On note $\underline{C}$ son amplitude complexe. Quel est le lien entre $\arg(\underline{C})$ et $\arg(\underline{A})$? Comment obtient-on dans le plan complexe le vecteur d'affixe $\underline{C}$ à partir du vecteur d'affixe $\underline{A}$?

4. Le facteur $\sqrt{2}$ est lié à la définition d'une tension efficace. Cette notion sera vue plus tard en électrocinétique.

Chapitre 6 : Équations différentielles linéaires à coefficients constants

6.1 ED du premier ordre

Définitions et notations

Une **équation différentielle (ED) linéaire du 1^{er} ordre à coefficients constants** est une équation de la forme :

$$a \frac{df}{dx}(x) + bf(x) = \Phi(x) \quad , \quad (1)$$

où f est une fonction de la variable x , $\frac{df}{dx}$ sa dérivée première (par rapport à la variable x), $a \neq 0$ et b des constantes de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ et Φ , appelée «second membre» de l'équation différentielle, une fonction connue.

L'ED est **linéaire** car le membre de gauche de (1) est une **combinaison linéaire** de $f(x)$ et $\frac{df}{dx}(x)$, c'est-à-dire qu'on additionne $f(x)$ et $\frac{df}{dx}(x)$ avec des coefficients constants et qui ne dépendent donc pas de la variable x . Cela signifie aussi que si on remplaçait $f(x)$ par $\lambda f(x)$ dans (1), on obtiendrait une autre ED qui serait obtenue à partir de (1) dans laquelle on multiplierait tout le membre de gauche par λ .

La **résolution** de cette ED consiste à **déterminer la forme générale** des fonctions f solutions de l'ED (1), c'est-à-dire vérifiant (1). Dire qu'une fonction g , dont on connaîtrait l'expression en fonction de x , vérifie l'ED (1), c'est calculer $\frac{dg}{dx}(x)$ et vérifier que $a \frac{dg}{dx}(x) + bg(x)$ vaut bien $\Phi(x)$ pour tout x .

La variable est ici x mais il est courant en physique que cela soit le temps t .

Méthode de résolution

Première étape : on résout l'ED **sans second membre**, aussi appelée **équation homogène** :

$$a \frac{df_H}{dx}(x) + bf_H(x) = 0 \quad , \quad (2)$$

où l'on a introduit la notation f_H pour désigner la solution générale de l'ED (2) et ainsi la distinguer de la solution générale de l'ED (1). Comme une fonction exponentielle et sa dérivée sont proportionnelles, on recherche la solution générale de (2) sous la forme $f_H(x) = K \exp(rx)$ où K et r sont des constantes. En injectant cette solution dans l'ED (2), on obtient l'**équation caractéristique** associée à l'équation sans second membre

$$ar + b = 0 \quad (3)$$

qui est une équation algébrique du premier degré en l'inconnue r . On notera que la variable x n'intervient pas dans l'équation caractéristique. Elle est obtenue en remplaçant dans (2) $f_H(x)$ par 1 et $\frac{df_H}{dx}(x)$ par r .

La résolution de l'équation caractéristique (3) donne $r = -b/a$. La solution générale f_H de l'équation homogène s'écrit donc :

$$f_H(x) = K \exp(rx) = K \exp\left(-\frac{b}{a}x\right) \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{C} \quad . \quad (4)$$

La solution est dite «générale» car elle correspond à une infinité de solutions qui ne diffèrent que par la constante multiplicative K .

Deuxième étape : on cherche **une solution particulière f_P** qui vérifie l'ED **avec second membre** (1). Pour cela, on appliquera la méthode de ressemblance. Il existe une autre méthode, plus générale, appelée méthode «de la variation de la constante» mais elle ne sera pas présentée ici. La méthode de ressemblance consiste à chercher f_P sous une forme ayant la même dépendance analytique que le second membre Φ en

la variable de dérivation (t ou x). La recherche de f_P se fait donc au cas par cas. Des exemples explicites, d'une grande importance en physique ou en chimie, seront traités dans les exercices ci-dessous.

Troisième étape : La **solution générale** de l'ED (1) s'écrit alors sous la forme :

$$f(x) = f_H(x) + f_P(x) = K \exp\left(-\frac{b}{a}x\right) + f_P(x) \quad , \quad K \in \mathbb{R} \quad (5)$$

où f_H est la **solution générale de l'équation homogène associée**, c'est-à-dire de l'ED sans second membre, cf. première étape et solution (4), et f_P est **une solution particulière de l'équation avec second membre**, cf. deuxième étape.

Remarque : résoudre une ED du premier ordre, qui est une relation entre f et sa dérivée première, revient en quelque sorte à faire une intégration pour trouver l'expression analytique de f . Or nous avons vu dans le chapitre 2 que pour une fonction continue donnée, il existe une infinité de primitives de f qui diffèrent toutes par une constante. Ici, cela se traduit dans (5) par la présence de la constante K .

Quatrième étape (éventuelle) : les trois étapes ci-dessus correspondent à la détermination de la **solution générale** d'une ED. Comme il y a une infinité de solutions f_H de l'équation homogène via la constante K , il y a aussi une infinité de solutions de l'ED avec second membre données par (5).

La donnée d'une condition initiale (si la variable de dérivation est le temps t) ou d'une condition limite, dite aussi «condition aux bords» (si la variable de dérivation est une position x), permet de déterminer, parmi l'infinité de solutions possibles de l'ED, l'**unique solution** qui vérifie l'ED (1) et la condition initiale/limite donnée.

Attention : il faut appliquer la condition initiale ou la condition limite **à la solution générale** (5) de l'ED avec second membre et non pas à la solution générale (4) de l'équation homogène associée.

6.1.1 ED sans second membre

Soit l'équation différentielle :

$$\frac{df}{dx}(x) = 4f(x) \quad .$$

- 1) Écrire et résoudre l'équation caractéristique associée.
- 2) En déduire la solution générale de l'équation différentielle.
- 3) On donne $f(0) = 5$. Déterminer l'expression de l'unique solution f de l'équation différentielle vérifiant cette condition initiale.
- 4) Tracer le graphe de f .

6.1.2 Exponentielle complexe

Soient l'équation différentielle et la condition initiale suivantes (t est le temps donc un réel) :

$$\frac{df}{dt}(t) = if(t) \quad , \quad f(0) = 1 \quad .$$

- 1) Écrire et résoudre l'équation caractéristique associée. En déduire la solution générale de l'équation différentielle.
- 2) En utilisant la condition initiale $f(0) = 1$, déterminer l'unique solution de l'équation différentielle vérifiant cette condition initiale.
- 3) Vérifier que la fonction $\tilde{f} : t \mapsto \tilde{f}(t) = \cos t + i \sin t$ est aussi solution de l'équation différentielle et qu'on a aussi $\tilde{f}(0) = 1$. Conclure.

6.1.3 ED avec coefficients numérique et second membre constant

Soit l'équation différentielle :

$$\frac{df}{dx}(x) + 3f(x) = -4 \quad .$$

- 1) Écrire l'équation caractéristique associée et déterminer la solution f_H de l'équation différentielle homogène associée.
- 2) Montrer que la fonction $f_P(x) = C = \text{cste}$ est solution de l'équation différentielle avec second membre en déterminant la valeur de C . Écrire la solution générale f (somme de la solution générale de l'équation différentielle homogène et de la solution particulière) de l'équation différentielle.
- 3) On donne $f(0) = 2/3$. Déterminer l'expression de l'unique solution f de l'équation différentielle vérifiant cette condition aux bords.
- 4) Tracer le graphe de f .

6.1.4 ED avec coefficients littéraux et second membre constant

Soient A et τ deux constantes réelles avec $A \geq 0$ et $\tau > 0$. On considère l'équation différentielle suivante :

$$\frac{df}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}f(t) = A \quad ,$$

où t représente le temps et f une grandeur physique réelle.

- 1) Quelle est la dimension de τ ?
- 2) Écrire l'équation caractéristique associée et déterminer la solution f_H de l'équation différentielle homogène associée.
- 3) Montrer que la fonction $f_P(t) = C$, où C une constante, est solution de l'équation différentielle avec second membre en déterminant la valeur de C .
- 4) En déduire la solution générale f de l'équation différentielle avec second membre.
- 5) On donne la condition initiale $f(0) = f_0 > A\tau$. Déterminer l'expression de l'unique solution f de l'équation différentielle vérifiant cette condition initiale.
- 6) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ et donner l'équation cartésienne de l'asymptote de f en $+\infty$.
- 7) Déterminer l'équation de la tangente à l'origine du graphe de f .
- 8) Pour quelle valeur de t la tangente à l'origine coupe-t-elle l'asymptote de f ?
- 9) En utilisant les résultats obtenus précédemment, tracer qualitativement le graphe de f . Quel est le comportement de f quand t tend vers $+\infty$?

6.1.5 ED avec second membre sinusoïdal

Soit l'équation différentielle :

$$\frac{df}{dt}(t) + 3f(t) = 2 \cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad \omega \neq 0 \quad , \quad (6)$$

avec f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- 1) Déterminer f_H , solution de l'équation différentielle homogène associée.
- 2) On cherche à déterminer f_P , une solution particulière de (6). Montrer que $f_P(t) = C \cos(\omega t)$, avec C une constante, n'est pas solution.
- 3) Montrer que $f_P(t) = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)$, avec C et D deux constantes, est bien solution de (6) en déterminant les valeurs de C et D .

- 4) Un second membre sinusoïdal permet de rechercher f_P avec la représentation complexe vue dans le thème 2. On rappelle qu'en représentation complexe, $\cos(\omega t + \varphi)$ devient $\exp[i(\omega t + \varphi)]$. On va ici appliquer la méthode de ressemblance non pas directement sur (6), qui ne fait intervenir que des grandeurs réelles, mais sur une version complexe faisant intervenir la représentation complexe de fonctions sinusoïdales. Plus exactement, on fera les étapes suivantes :
- Écrire la représentation complexe $\underline{\Phi}$ du second membre Φ .
 - On cherche f_P sous la forme $f_P(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$. En écrire la représentation complexe $\underline{f_P}(t)$ en faisant apparaître explicitement son amplitude complexe, qu'on notera $\underline{A}$.
 - On admet que l'équation différentielle réelle (6) peut s'écrire en version complexe en remplaçant f_P et Φ par leurs représentations complexes respectives. Écrire cette équation différentielle complexe.
 - Montrer que cette équation différentielle se simplifie pour donner une équation algébrique en $\underline{A}$. La résoudre.
 - En écrivant $\underline{A}$ et $\exp[i\omega t]$ sous leur forme algébrique, calculer la partie réelle de $\underline{f_P}(t)$. Quel est le lien avec $f_P(t)$? Retrouver l'expression de $f_P(t)$ déterminée à la question 3).
- 5) Écrire la solution générale de l'équation différentielle (6).

6.2 ED du deuxième ordre homogène

Définitions et notations

Une **équation différentielle (ED) linéaire du deuxième ordre à coefficients constants homogène** (ou sans second membre) est une équation de la forme :

$$a \frac{d^2 f}{dt^2}(t) + b \frac{df}{dt}(t) + cf(t) = 0 \quad , \quad (7)$$

où f est une fonction de la variable réelle t , $\frac{df}{dt}$ et $\frac{d^2 f}{dt^2}$ sont respectivement sa dérivée première et sa dérivée seconde par rapport à t , $a \neq 0$, b et c sont des constantes de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ (elles ne dépendent donc pas de la variable t).

La dérivée seconde de f peut aussi s'écrire f'' ou $\ddot{f}$ (dans le cas où la variable de dérivation est le temps t). La **résolution** de cette ED consiste à **déterminer la forme générale** des fonctions f solutions de l'ED (1), c'est-à-dire vérifiant (1). Dire qu'une fonction g , dont on connaîtrait l'expression en fonction de t , vérifie l'ED (1), c'est calculer $\frac{dg}{dt}(t)$ et $\frac{d^2 g}{dt^2}(t)$, et vérifier que $a \frac{d^2 g}{dt^2}(t) + b \frac{dg}{dt}(t) + cg(t)$ vaut bien 0 $\forall t$.

Méthode de résolution

Comme dans le cas d'équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1, on cherche f sous la forme d'une exponentielle : $f(t) = K \exp(rt)$ où K et r sont des constantes. En injectant dans l'ED 7, on obtient l'**équation caractéristique** associée à cette ED qui est une équation du second degré en r (donc indépendante de la variable t) :

$$a r^2 + b r + c = 0 \quad .$$

Elle est obtenue en remplaçant dans (7) $f(t)$ par 1, $\frac{df}{dt}(t)$ par r et $\frac{d^2 f}{dt^2}(t)$ par r^2 .

Elle admet toujours deux solutions, distinctes ou égales, et éventuellement complexes si son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est négatif ou si a , b et c sont des complexes. Dans le cadre de ce thème, on considérera que les coefficients a , b et c sont réels. Dans ce cas, on distingue les 3 cas suivants.

• 2 racines complexes distinctes : cas où $\Delta < 0$.

L'équation caractéristique admet deux racines complexes $r_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$. La solution générale (réelle) de l'ED (7) s'écrit :

$$f(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad \text{où } C_1, C_2 \text{ sont des constantes complexes.}$$

Les coefficients C_1, C_2 , aussi bien que les exponentielles, sont des *nombre complexes*. Du fait que, dans ce chapitre, nous ne traiterons que du cas où les coefficients de l'ED (7) sont des réels, les solutions de l'équation caractéristique r_1 et r_2 sont des nombres complexes conjugués³ qu'on écrit $r_1 = \lambda + i\omega$ et $r_2 = \lambda - i\omega$ avec $\lambda, \omega \in \mathbb{R}$. Dans ces conditions, $f(t)$ s'écrit aussi :

$$f(t) = \exp(\lambda t) [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \quad \text{où } A, B \text{ sont des constantes réelles.}$$

$f(t)$ s'écrit donc comme le produit de $e^{\lambda t}$, exponentielle *réelle*, par $[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$, fonction trigonométrique de période $T = 2\pi/\omega$. L'effet de $e^{\lambda t}$ est de diminuer (si $\lambda < 0$) ou d'augmenter (si $\lambda > 0$) l'amplitude de la fonction trigonométrique au cours du temps. On dit alors qu'on est dans un **régime pseudo-périodique**, de pseudo-période T , à cause de cette modulation de l'amplitude au cours du temps.

• **2 racines réelles distinctes** : cas où $\Delta > 0$.

L'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes $r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$. La solution générale de l'ED (7) s'écrit :

$$f(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad \text{où } C_1 \text{ et } C_2 \text{ sont des constantes réelles.}$$

f est donc la somme de deux exponentielles réelles. Il n'y a pas de pseudo-périodicité. Donc, par opposition au cas où l'on a deux racines complexes conjuguées, on parle ici de **régime apériodique**.

• **1 racine réelle double** : cas où $\Delta = 0$.

L'équation caractéristique admet une seule racine double $r = -\frac{b}{2a}$. La solution générale de l'ED (7) s'écrit :

$$f(t) = (C_1 + C_2 t) e^{rt} \quad \text{où } C_1 \text{ et } C_2 \text{ sont des constantes réelles.}$$

On peut retrouver f en partant du cas où l'on a deux racines réelles distinctes et en regardant la limite quand $r_1 \rightarrow r_2$. C'est, entre autres, pour cette raison que le cas avec une seule racine réelle double est appelé **régime critique**.

Détermination éventuelle des deux constantes C_1 et C_2

Dans la résolution d'une ED du premier ordre, la solution générale comporte une constante quelconque. Pour la déterminer, il est nécessaire de disposer d'une condition initiale ou limite.

Pour résoudre une ED du deuxième ordre, relation entre f et sa dérivée seconde, il y a en principe deux intégrations à faire pour obtenir l'expression analytique de f , d'où la présence des deux constantes C_1 et C_2 dans la solution générale de l'ED (7). Comme elles sont quelconques, il y a une infinité de solutions. La donnée de **deux conditions initiales** ou conditions limites permet de déterminer, parmi l'infinité de solutions possibles de l'ED, l'**unique solution** qui vérifie l'ED (1) et les deux conditions initiales/limites données.

Remarque : dans cette UE, nous ne considérerons que le cas **homogène**, c'est-à-dire **sans second membre**. Plus généralement, on peut avoir un second membre non nul et donc avoir à résoudre une ED de la forme : $a \frac{d^2 f}{dt^2}(t) + b \frac{df}{dt}(t) + cf(t) = \Phi(t)$ où Φ est une fonction connue. La méthode de résolution est en principe la même que pour une ED du premier ordre : on détermine d'abord la solution générale f_H de l'équation homogène associée (avec la méthode décrite ci-dessus suivant le signe du discriminant de l'équation caractéristique) puis une solution particulière f_P de l'ED avec second membre par exemple par la méthode de ressemblance. Enfin la solution générale de l'ED avec second membre est la somme des deux : $f(t) = f_H(t) + f_P(t)$.

3. On a aussi la relation $C_1 = \overline{C_2}$, assurant le fait que la fonction f est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

6.2.1 Détermination de solutions générales

Pour les ED ci-dessous, écrire l'équation caractéristique associée et déterminer la solution générale de l'ED.

- 1) $\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 2 \frac{df(t)}{dt} + f(t) = 0$
- 2) $\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 2 \frac{df(t)}{dt} + 5 f(t) = 0$
- 3) $\frac{d^2 f}{dx^2}(x) + 3 \frac{df}{dx}(x) + 2 f(x) = 0$

6.2.2 Détermination d'une solution unique

On considère l'équation différentielle suivante :

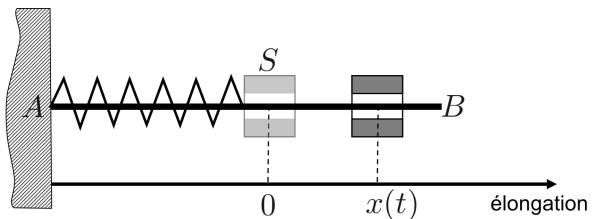
$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) + 4 \frac{df}{dx}(x) + 4 f(x) = 0 \quad .$$

- 1) Écrire l'équation caractéristique associée et déterminer la solution générale de l'équation différentielle.
- 2) On donne les deux conditions aux bords $f(0) = 1$ et $\frac{df}{dx}(0) = -1$. Déterminer l'expression de l'unique solution de l'équation différentielle vérifiant ces deux conditions aux bords.
- 3) Quel est le comportement de cette solution quand $x \rightarrow \infty$?

6.2.3 Oscillations libres d'un système masse-ressort

Un objet S assimilé à un point matériel de masse m , accroché à l'extrémité d'un ressort horizontal dont l'autre extrémité est fixe, est contraint d'osciller sans frottement le long d'une tige parallèle avec l'axe (Ox). Son poids étant compensé par la réaction de la tige, cet objet n'est soumis qu'à deux forces :

- la force de rappel du ressort, proportionnelle à l'allongement du ressort par rapport à sa longueur à vide,
- une force de frottement visqueux, due au fluide dans lequel oscille le mobile (l'air par exemple). Cette force est opposée à la vitesse de S et proportionnelle à celle-ci.



L'objet S , déplacé de sa position d'équilibre d'abscisse $x = 0$ jusqu'à la position initiale x_0 , est relâché à l'instant $t = 0$. Les lois de la mécanique permettent de décrire l'oscillation du mobile au cours du temps autour de sa position d'équilibre et d'établir que sa position x vérifie une équation du type :

$$m \ddot{x} + \mu \dot{x} + k x = 0 \quad (8)$$

où μ est le coefficient de frottement visqueux (> 0) et k , la constante de raideur du ressort (> 0).

L'oscillation du système n'est pas imposée par un dispositif qui excite le ressort, ce qui se traduit par le fait que le second membre de l'équation (8) est nul (équation homogène). On parle alors d'**oscillations libres**.

- 1) Amortissement négligeable ($\mu = 0$) : oscillations libres non amorties

L'équation (8) devient

$$m \ddot{x} + k x = 0 \quad . \quad (9)$$

- (a) Écrire l'équation caractéristique associée à cette équation homogène.

- (b) Déterminer l'expression du discriminant Δ de l'équation caractéristique et résoudre l'équation caractéristique (note : il n'est pas forcément nécessaire de calculer le discriminant pour trouver la racine).
- (c) Montrer alors que la solution générale de l'équation différentielle (9) peut s'écrire :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = C_1 \cos(\omega_0 t + \varphi) = C_2 \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (10)$$

où A , B , C_1 , C_2 , φ et ϕ sont des constantes réelles. On donnera l'expression de ω_0 en fonction des constantes du problème, son unité et ainsi que celle de φ .

2) Amortissement non négligeable ($\mu \neq 0$) : oscillations libres amorties

- (a) Montrer que l'équation 8 peut s'écrire :

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad , \quad (11)$$

et donner l'expression de τ et son unité.

- (b) Écrire l'équation caractéristique associée à cette équation différentielle.

- (c) Amortissement critique :

Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (11) dans le cas où le discriminant de l'équation caractéristique est nul. Montrer que dans ce cas, l'amortissement, que l'on dénommera amortissement critique, est tel que $\mu_c^2 = 4km$. Montrer alors que l'objet S atteint sa position d'équilibre $x = 0$ sans osciller lorsque t tend vers l'infini.

- (d) Amortissement fort – régime aperiodique :

Montrer que le discriminant de l'équation caractéristique est strictement positif quand $\mu^2 > 4km$, c'est-à-dire quand l'amortissement est plus grand que l'amortissement critique. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle en fonction des constantes positives λ et β définies par :

$$\lambda = \frac{1}{2\tau} \quad \text{et} \quad \beta = \omega_0 \sqrt{\frac{\mu^2}{\mu_c^2} - 1} \quad .$$

Montrer alors que l'objet S atteint sa position d'équilibre $x = 0$ sans osciller lorsque t tend vers l'infini.

- (e) Amortissement faible – régime pseudo-périodique :

- a) Dans le cas où l'amortissement est plus petit que l'amortissement critique, déterminer la solution générale de l'équation différentielle en fonction de la constante λ précédemment définie et de la constante positive ω définie par :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{\mu_c^2}} \quad .$$

- b) En remarquant que les coefficients de l'équation (11) à résoudre sont réels, vérifier que la solution générale x de l'équation différentielle peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp(-\lambda t) [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \\ \text{ou } x(t) &= C_1 \exp(-\lambda t) \cos(\omega t + \varphi) \\ \text{ou } x(t) &= C_2 \exp(-\lambda t) \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

avec A , B , C_1 , C_2 , φ et ϕ des constantes réelles.

- c) Vérifier alors que l'objet S atteint sa position d'équilibre $x = 0$ en oscillant à une pulsation ω légèrement inférieure à la pulsation ω_0 lorsque t tend vers l'infini.