



Sciences du Numérique, Appliquées et Fondamentales  
Année universitaire 2022-2023

---

Outils Mathématiques 1  
Physique Licence Spéciale  
Phys1-OM1-PS  
KPHXIA61 (semestre d'automne)

---

Fascicule de Cours-TD

---

Ce fascicule est associé aux Cours-TD d'Outils Mathématiques 1. Cette Unité d'Enseignement ne comporte pas de cours. Les notions fondamentales sont présentées en début de chacun des thèmes et seront reprises par votre enseignant.

Il est indispensable de s'inscrire au cours d'outils maths 1 PS sur moodle :

Tous les cours / 2022-2025 / FSI\_Rentrée 2022 - 2023 / Sciences du Numérique, Appliquées, Fondamentales (SNAF) / Licence / Mention Physique / Niveau 1 / Outils mathématiques 1 PS - KPHXIA61. Vous y trouverez entre autres la version numérique du fascicule, les modalités de contrôle des connaissances, la liste des enseignants, etc.

| Symbole             |           | Nom        |
|---------------------|-----------|------------|
| Minuscule           | Majuscule |            |
| $\alpha$            |           | alpha      |
| $\beta$             |           | beta       |
| $\gamma$            | $\Gamma$  | gamma      |
| $\delta$            | $\Delta$  | delta      |
| $\varepsilon$       |           | epsilon    |
| $\zeta$             |           | zeta       |
| $\eta$              |           | eta        |
| $\theta, \vartheta$ | $\Theta$  | theta      |
| $\kappa$            |           | kappa      |
| $\lambda$           | $\Lambda$ | lambda     |
| $\mu$               |           | mu         |
| $\nu$               |           | nu         |
| $\xi$               |           | xi ("ksi") |
| $\pi$               | $\Pi$     | pi         |
| $\rho$              |           | rho        |
| $\sigma$            | $\Sigma$  | sigma      |
| $\tau$              |           | tau        |
| $\phi, \varphi$     | $\Phi$    | phi        |
| $\chi$              |           | chi ("ki") |
| $\psi$              | $\Psi$    | psi        |
| $\omega$            | $\Omega$  | omega      |

D'autres notations utiles :

$\forall x$ , quel que soit  $x$ ,

$\exists x$  : il existe  $x$  tel que

$\exists! x$  : il existe un unique  $x$  tel que

# Chapitre 1 : Dérivation et tracé de fonctions d'une seule variable réelle

## Notations

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ . On ne s'intéressera pas ici sur le caractère dérivable ou non de  $f$ . On utilise la notation  $f'$  pour désigner la fonction dérivée (appelée plus simplement «dérivée») de  $f$  par rapport à sa variable. Il est courant en physique d'utiliser la notation de Leibniz qui a l'avantage d'explicitier la variable de dérivation. Si  $f$  est une fonction de la variable  $x$ , alors on note :

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}f(x)$$

La notation « $\frac{d}{dx}$ » correspond à l'opérateur de dérivation qui est appliqué ci-dessus sur la fonction  $f$ . Si  $f$  est une fonction de la variable  $t$ , on écrirait plutôt  $f'(t) = \frac{df}{dt}(t)$ . En cinématique, on utilise souvent la notation  $\dot{f}(t) = \frac{df}{dt}(t)$  et elle est réservée au cas où la variable est le temps  $t$ . Dans la partie cours de ce chapitre, la variable sera notée  $x$  mais dans la suite, il se peut que la variable soit  $t$ , voire un volume  $V$  ou une température  $T$ .

On peut calculer la dérivée seconde, troisième, etc. de  $f$  si  $f$  est dérivable 2 fois, 3 fois, etc. On note par exemple pour la dérivée seconde de  $f$  :

$$f''(x) = (f'(x))' = \frac{d}{dx} \frac{df}{dx}(x) = \frac{d^2f}{dx^2}(x)$$

## Dérivée de fonctions usuelles

On donne ci-dessous l'expression de dérivées qu'il faut absolument (re)connaître.  $\mathcal{D}_f$  et  $\mathcal{D}_{f'}$  sont respectivement les ensembles de définition de  $f$  et de  $f'$ .

| Fonction $f$                                     | $\mathcal{D}_f$   | Dérivée $f' = \frac{df}{dx}$ | $\mathcal{D}_{f'}$ |
|--------------------------------------------------|-------------------|------------------------------|--------------------|
| $ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$              | $\mathbb{R}$      | $a$                          | $\mathbb{R}$       |
| $x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$                    | $\mathbb{R}$      | $nx^{n-1}$                   | $\mathbb{R}$       |
| $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ avec $n \in \mathbb{N}$ | $\mathbb{R}^*$    | $-\frac{n}{x^{n+1}}$         | $\mathbb{R}^*$     |
| $\sqrt{x} = x^{1/2}$                             | $\mathbb{R}^+$    | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$        | $\mathbb{R}^{*+}$  |
| $e^x$                                            | $\mathbb{R}$      | $e^x$                        | $\mathbb{R}$       |
| $\ln(x)$                                         | $\mathbb{R}^{*+}$ | $\frac{1}{x}$                | $\mathbb{R}^*$     |
| $\sin(x)$                                        | $\mathbb{R}$      | $\cos(x)$                    | $\mathbb{R}$       |
| $\cos(x)$                                        | $\mathbb{R}$      | $-\sin(x)$                   | $\mathbb{R}$       |
| $\text{sh}(x)$                                   | $\mathbb{R}$      | $\text{ch}(x)$               | $\mathbb{R}$       |
| $\text{ch}(x)$                                   | $\mathbb{R}$      | $\text{sh}(x)$               | $\mathbb{R}$       |

Remarque : Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on peut retenir la dérivée des fonctions  $x \mapsto x^n$ ,  $x \mapsto 1/x^n$  et  $x \mapsto \sqrt{x}$  via une seule formule :

$$(x^\alpha)' = \frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

car le cas  $x \mapsto x^n$  est obtenu avec  $\alpha = n$ , le cas  $x \mapsto 1/x^n$  avec  $\alpha = -n$  et le cas  $x \mapsto \sqrt{x}$  avec  $\alpha = 1/2$ .

## Dérivée de somme ou produit de fonctions

Ci-dessous,  $u$  et  $v$  sont deux fonctions de la variable réelle  $x$  dérivables.

| Fonction                               | Dérivée                                |
|----------------------------------------|----------------------------------------|
| $u(x) + v(x)$                          | $u'(x) + v'(x)$                        |
| $ku(x)$ pour $k \in \mathbb{R}$        | $ku'(x)$                               |
| $u(x)v(x)$                             | $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$                |
| $\frac{1}{u(x)}$ avec $u(x) \neq 0$    | $-\frac{u'(x)}{u(x)^2}$                |
| $\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $v(x) \neq 0$ | $\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$ |

## Dérivée de fonctions composées

Soit  $f$  une fonction de la variable réelle  $x$ . On suppose que  $g$  est une fonction d'une seule variable et qu'on peut calculer  $g[f(x)]$ . On note  $g[f(x)] = (g \circ f)(x)$ . On dit que  $g \circ f$  est une fonction composée. Sa dérivée par rapport à  $x$  est donnée par :

$$(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \times f'(x) = g'[f(x)] \times f'(x)$$

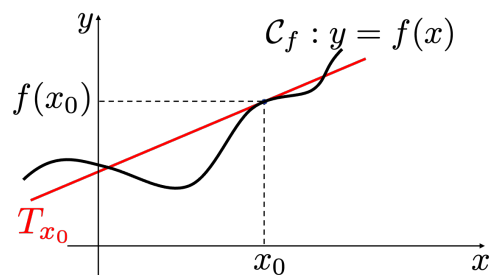
Exemples (on supposera que les valeurs de  $u(x)$  permettent de calculer  $\sqrt{u(x)}$  ou  $\ln[u(x)]$ , etc.) :

| Fonction                                    | Dérivée                      |
|---------------------------------------------|------------------------------|
| $u^n(x) = (u(x))^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ | $nu^{n-1}(x) u'(x)$          |
| $\sqrt{u(x)}$                               | $\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ |
| $e^{u(x)}$                                  | $u'(x)e^{u(x)}$              |
| $\ln[u(x)]$                                 | $\frac{u'(x)}{u(x)}$         |
| $\sin[u(x)]$                                | $u'(x) \cos[u(x)]$           |
| $\cos[u(x)]$                                | $-u'(x) \sin[u(x)]$          |
| $\text{sh}[u(x)]$                           | $u'(x) \text{ch}[u(x)]$      |
| $\text{ch}[u(x)]$                           | $u'(x) \text{sh}[u(x)]$      |

## Tangente à une courbe représentative

Pour  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ , on note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative (aussi appelée graphe de  $f$ ) la courbe d'équation  $y = f(x)$ . Pour  $x_0 \in I$ , la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $x_0$ , notée  $T_{x_0}$ , est la droite qui a pour équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



## Extrema d'une fonction

Soit  $f$  une fonction de la variable réelle  $x$  deux fois dérivable. Soit  $x_0 \in \mathcal{D}_f$  tel que  $f'(x_0) = 0$ . Le point de coordonnées  $(x_0, f(x_0))$  est alors :

- un minimum de  $f$  si  $f''(x_0) > 0$ ;
- un maximum de  $f$  si  $f''(x_0) < 0$ ;
- un point d'inflexion si  $f''(x_0) = 0$ .

### 1.1 Calcul de dérivées

Dans les questions ci-dessous,  $a, b, \omega$  et  $\varphi$  sont des constantes réelles quelconques. Calculer la dérivée des fonctions proposées. Tracer les fonctions encadrées.

- 1)  $f_1(x) = 2x^3$      $f_2(x) = \ln(x-1)$      $f_3(x) = e^{-x}$      $f_4(x) = \sin(4x)$      $f_5(x) = \sqrt{2} \cos(3x)$
- 2)  $g_1(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}$      $g_2(x) = \frac{x}{(a+x)^2}$      $g_3(x) = x^2 \sin x$      $g_4(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$      $g_5(x) = x^2 e^x$
- 3)  $h_1(x) = \cos^2 x$      $h_2(x) = \sqrt{ax+b}$      $h_3(x) = e^{-x^2/(2a^2)}$      $h_4(x) = \ln(x^2 + x + a)$      $h_5(t) = \cos(\omega t + \varphi)$
- 4)  $k_1(x) = \operatorname{th} x$      $k_2(x) = \sqrt{\cos(2x)}$      $k_3(x) = \ln \left( \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x} \right)$      $k_4(x) = \ln \left( \frac{e^x}{1+e^x} \right)$      $k_5(t) = x^{\sin(x)}$

### 1.2 Tangente à une courbe représentative

Soit la fonction  $f$  de la variable  $t$  définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(t) = f_0 \exp(-t/\tau) \end{aligned}$$

où  $f_0$  et  $\tau$  sont des constantes réelles strictement positives. On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$ .

- 1) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ . En déduire que  $\mathcal{C}_f$  admet une asymptote en  $+\infty$  dont on donnera l'équation cartésienne.
- 2) Déterminer la tangente à  $\mathcal{C}_f$  en  $t = 0$  (qu'on appelle aussi «tangente à l'origine»).
- 3) Tracer qualitativement  $\mathcal{C}_f$ , l'asymptote déterminée à la question 2 et la tangente à l'origine.

### 1.3 Extrema d'une fonction

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{1}{15} - 10x - \frac{10}{x}$ .

- 1)  $f$  admet-elle un extremum sur  $]0, +\infty[$ ? Si oui, déterminer si c'est un minimum ou un maximum.
- 2) Même question sur  $] -\infty, 0[$ .

# Chapitre 2 : Intégration de fonctions d'une variable réelle

## Définition de la primitive d'une fonction continue

Si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  alors elle admet une primitive sur  $I$ , notée  $F$ . On a donc  $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$ . On peut alors en déduire toutes les primitives de  $f$  qui sont les fonctions  $x \mapsto F(x) + C$  avec  $C \in \mathbb{R}$ . Il en existe une infinité car  $C$  est quelconque. Si on impose une certaine valeur à  $F$  en un  $x$  donné, alors la primitive devient unique.

La primitive d'une somme de fonctions est la somme des primitives : si  $F$  et  $G$  sont respectivement des primitives de  $f$  et  $g$  alors une primitive de  $x \mapsto f(x) + g(x)$  est  $x \mapsto F(x) + G(x) + C$  avec  $C \in \mathbb{R}$ .

Vous pouvez également rencontrer l'écriture suivante pour une primitive de  $f$  (intégrale indéfinie) :  $\int^x f(t)dt = F(x) + C$  avec  $C \in \mathbb{R}$  où  $t$  est une variable muette. La notation  $\int f(x)dx = F(x) + C$  est en revanche à proscrire.

## Primitives de fonctions usuelles

Dans le tableau ci-dessous, on rappelle les primitives de fonctions usuelles qu'il faut absolument (re)connaître. Faites le lien avec le tableau de la page 1.  $I$  est l'intervalle sur lequel la fonction  $f$  est définie et  $C$  est une constante réelle quelconque.

| Fonction $f$                                          | $F$ , primitive de $f$                 | Intervalle $I$    |
|-------------------------------------------------------|----------------------------------------|-------------------|
| $a$ avec $a \in \mathbb{R}$                           | $ax + C$                               | $\mathbb{R}$      |
| $x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$                         | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$              | $\mathbb{R}$      |
| $\frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \neq 1$ | $-\frac{1}{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + C$ | $\mathbb{R}^*$    |
| $\sqrt{x} = x^{1/2}$                                  | $\frac{2}{3} x^{3/2} + C$              | $\mathbb{R}^+$    |
| $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$                       | $2\sqrt{x} + C$                        | $\mathbb{R}^{*+}$ |
| $e^x$                                                 | $e^x + C$                              | $\mathbb{R}$      |
| $\frac{a}{x}$                                         | $a \ln  x  + C$                        | $\mathbb{R}^*$    |
| $\sin(x)$                                             | $-\cos(x) + C$                         | $\mathbb{R}$      |
| $\cos(x)$                                             | $\sin(x) + C$                          | $\mathbb{R}$      |
| $\text{sh}(x)$                                        | $\text{ch}(x) + C$                     | $\mathbb{R}$      |
| $\text{ch}(x)$                                        | $\text{sh}(x) + C$                     | $\mathbb{R}$      |

Rem. : Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on peut retenir l'expression d'une primitive des fonctions  $x \mapsto x^n$ ,  $x \mapsto 1/x^n$ ,  $x \mapsto \sqrt{x}$  et  $x \mapsto 1/\sqrt{x}$  via une seule formule :

$$\text{Primitive de } x \mapsto x^\alpha : \quad x \mapsto \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha \neq -1$$

car le cas  $x \mapsto x^n$  est obtenu avec  $\alpha = n$ , le cas  $x \mapsto 1/x^n$  avec  $\alpha = -n$ , le cas  $x \mapsto \sqrt{x}$  avec  $\alpha = 1/2$  et le cas  $x \mapsto 1/\sqrt{x}$  avec  $\alpha = -1/2$ .

## Primitives de fonctions composées

Le tableau ci-dessous est essentiellement le même que celui du chapitre 1 sur la dérivée de fonctions composées mais présenté autrement.  $C$  est une constante réelle quelconque. On supposera que les valeurs de  $u$  permettent de calculer  $\sqrt{u(x)}$  ou  $\ln[u(x)]$ , etc.

| Fonction                                                          | Primitive                                     |
|-------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $u'(x) (u(x))^n$ pour $n \in \mathbb{N}$                          | $\frac{1}{n+1} (u(x))^{n+1} + C$              |
| $\frac{u'(x)}{(u(x))^n}$<br>pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \neq 1$ | $-\frac{1}{(n-1)} \frac{1}{(u(x))^{n-1}} + C$ |
| $u'(x)\sqrt{u(x)}$                                                | $\frac{2}{3} (u(x))^{3/2} + C$                |
| $\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$                                       | $2\sqrt{u(x)} + C$                            |
| $u'(x) e^{u(x)}$                                                  | $e^{u(x)} + C$                                |
| $\frac{u'(x)}{u(x)}$                                              | $\ln  u(x)  + C$                              |
| $u'(x) \cos[u(x)]$                                                | $\sin[u(x)] + C$                              |
| $u'(x) \sin[u(x)]$                                                | $-\cos[u(x)] + C$                             |
| $u'(x) \operatorname{ch}[u(x)]$                                   | $\operatorname{sh}[u(x)] + C$                 |
| $u'(x) \operatorname{sh}[u(x)]$                                   | $\operatorname{ch}[u(x)] + C$                 |

On notera que, pour permettre le calcul d'une primitive d'une fonction composée sans outil analytique supplémentaire (intégration par parties, changement de variables, etc.), il est indispensable d'avoir en facteur  $u'(x)$  dans la fonction à intégrer. Une vérification du calcul d'une primitive  $F$  de  $f$  est de dériver la fonction  $F$  obtenue et de vérifier que  $F'(x) = f(x)$ . Cela permet notamment d'identifier les facteurs numériques qui apparaissent dans le calcul d'une primitive.

## Intégrale définie de fonctions continues

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  et  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ . Alors l'intégrale de  $f$  sur un intervalle  $[a, b] \subset I$  s'écrit :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

La notation  $[F(x)]_a^b$  signifie  $F(b) - F(a)$ . Alors qu'une primitive est une fonction, une intégrale est un nombre réel.

La variable d'intégration sous le signe intégral est une variable dite muette. On peut en effet écrire :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy = \int_a^b f(\xi) d\xi$$

Il faut donc prendre soin d'identifier la variable par rapport à laquelle on intègre, indiquée par l'élément  $dx$  (par exemple  $x$  est la variable d'intégration s'il y a un  $dx$ ) et la dépendance analytique de la fonction qu'on intègre (notée ici  $f$ ) par rapport à la variable d'intégration.

**Interprétation géométrique d'une intégrale définie :** pour  $f$  fonction continue sur l'intervalle  $[a, b]$ , l'intégrale  $\int_a^b f(x)dx$  est l'«aire sous la courbe» c'est-à-dire l'aire délimitée par les droites  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$  et  $C_f$ , courbe représentative de  $f$  d'équation  $y = f(x)$ . Cette aire est algébrique : elle est comptée positivement si elle est dans le demi-plan  $y \geq 0$ , et négativement sinon.

Il s'agit de la limite de la somme finie  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$  pour  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$  où  $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$  et le segment  $[a, b]$  est partagé en  $n$  parties par les points  $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ . Cette somme est bien celle de l'aire des rectangles de base  $\Delta x_i$  et de hauteur  $f(\xi_i)$ .

## Intégration par parties

Soient  $u'$  et  $v$  deux fonctions continues sur un intervalle  $[a, b]$ . On a :

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = \left[ u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

On remarquera que c'est la même relation que  $(uv)' = u'v + uv'$  qu'on a écrite  $u'v = (uv)' - uv'$  et qu'on a intégrée.

## Intégration par changement de variables

Soit  $f(x)$  une fonction dont nous ne savons pas calculer directement l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$ . Il est très utile alors de choisir une fonction  $\varphi$  telle que  $x = \varphi(t)$  et l'intégrale s'écrit alors

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t_a}^{t_b} f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt \text{ où } a = \varphi(t_a) \text{ et } b = \varphi(t_b) \quad (1)$$

Il s'agit d'un changement de variable qui se démontre en utilisant la dérivée d'une fonction composée.

*Remarque importante :* Il est souvent préférable de choisir le changement de variable sous la forme  $t = \psi(x)$  [au lieu de  $x = \varphi(t)$ ].

- Exemple 1 : pour calculer l'intégrale de la forme  $I = \int_a^b \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} dx$  on pose  $t = \psi(x)$  et alors  $dt = \psi'(x)dx$ . On trouve alors  $I = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} \frac{dt}{t} = \ln \left[ \frac{\psi(b)}{\psi(a)} \right]$ .
- Exemple 2 :  $\int_a^b \sin(x) \cos^n(x) dx = \int^{\cos a} -t^n dt = -\frac{(\cos a)^{n+1}}{n+1}$  pour  $n \neq -1$  en ayant posé  $t = \cos(x)$ .
- Exemple 3 : Soit l'intégrale  $F(x) = \int^x \frac{d\theta}{\sin(\theta)}$  qui ne se calcule ni directement, ni par intégration par parties. Dans ce cas la dérivée de  $\sin$  n'apparaît pas au numérateur et on ne peut donc pas suivre l'exemple 1. Un astuce consiste à poser  $t = \tan(\theta/2)$ . On a alors  $dt = \tan'(\theta/2)/2 = (1+t^2)/2$  et à l'aide de la formule de trigonométrie  $\frac{\sin \theta}{1} = \frac{2 \cos(\theta/2) \sin(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2)} = \frac{2t}{1+t^2}$ , l'intégrale se simplifie selon  $F(x) = \int^{\tan(x/2)} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \ln[1+t^2]$ .



## 2.1 Calcul de primitives usuelles

Calculer une primitive des fonctions ci-dessous.

- |                                            |                                         |                                     |
|--------------------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$                  | 2) $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$ | 3) $f(x) = (x - 2)(x + 1)$          |
| 4) $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ | 5) $f(x) = 3e^x$                        | 6) $f(x) = \sqrt{2}\cos x - \sin x$ |

## 2.2 Calcul de primitives uniques

- 1) Déterminer **la** primitive de  $x \mapsto \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$  qui s'annule en  $x = 1$ .
- 2) Déterminer **la** primitive de  $x \mapsto 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$  qui vaut 1 en  $x = 4$ .

## 2.3 Calcul de primitives de fonctions composées

- 1) Soit  $k \in \mathbb{R}^*$ . Calculer une primitive des fonctions suivantes :

|                       |                                   |                                     |
|-----------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| $f_1(x) = (kx - 1)^2$ | $f_2(x) = \frac{1}{kx + 1}$       | $f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$     |
| $f_4(x) = e^{-kx}$    | $f_5(t) = \sqrt{2}\cos(\omega t)$ | $f_6(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ |

- 2) Calculer une primitive des fonctions suivantes :

|                                   |                                                         |                                         |                                    |
|-----------------------------------|---------------------------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------|
| $g_1(x) = (4x + 3)(2x^2 + 3x)^5$  | $g_2(x) = \frac{2}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$ | $g_3(x) = \frac{4x + 3}{(2x^2 + 3x)^5}$ | $g_4(x) = xe^{-x^2}$               |
| $g_5(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$ | $g_6(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$                      | $g_7(x) = \sin x \cos^2 x$              | $g_8(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ |

## 2.4 Calcul d'intégrales

- 1) Calculer les intégrales suivantes :

|                                                          |                               |                                                     |
|----------------------------------------------------------|-------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $I_1 = \int_0^1 (2x^2 + 3x - 1) dx$                      | $I_2 = \int_{-1}^1 3e^x dx$   | $I_3 = \int_0^{\pi/2} (\sqrt{2}\cos t - \sin t) dt$ |
| $I_4 = \int_0^{\pi/(2\omega)} \sqrt{2}\cos(\omega t) dt$ | $I_5 = \int_0^4 xe^{-x^2} dx$ | $I_6 = \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$          |

- 2) Calculer les intégrales suivantes et les comparer aux primitives calculées dans l'exercice **2.2** :

$$\int_1^x \left(\frac{3}{t} - \frac{1}{t^2}\right) dt \quad \text{pour } x > 1 \quad , \quad \int_4^x \left(2\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt \quad \text{pour } x > 4$$

- 3) Calculer l'intégrale  $I = \int_1^2 \sqrt{x} dx$ . Tracer la courbe représentative de la fonction racine et donner l'interprétation géométrique de  $I$ .

## 2.5 Intégration par parties

- 1) Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Calculer l'intégrale  $\int_0^a xe^{-x} dx$ .

- 2) Pour  $x > 0$ , calculer l'intégrale  $\int_1^x \ln t \, dt$ .
- 3) On cherche à calculer  $I = \int_1^e x \ln x \, dx$ . Par intégration par parties et en utilisant le résultat de la question précédente, établir une équation sur  $I$ . Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de  $I$ .

## 2.6 Intégration par changement de variables

- 1) Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Calculer l'intégrale  $\int_0^b \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx$ .
- 2) Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Calculer l'intégrale  $\int_0^b \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx$ .
- 3) Soit  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Calculer l'intégrale  $\int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1 - \cos(x)}} \, dx$ .

# Chapitre 3 : Équations différentielles linéaires à coefficients constants

## 3.1 'Equation différentielle du premier ordre

### Définitions et notations

Une **équation différentielle (ED) linéaire du 1<sup>er</sup> ordre à coefficients constants** est une équation de la forme :

$$a \frac{df}{dx}(x) + bf(x) = \Phi(x) \quad , \quad (1)$$

où  $f$  est une fonction de la variable  $x$ ,  $\frac{df}{dx}$  sa dérivée première (par rapport à la variable  $x$ ),  $a \neq 0$  et  $b$  des constantes de  $\mathbb{R}$  ou de  $\mathbb{C}$  et  $\Phi$ , appelée «second membre» de l'équation différentielle, une fonction connue.

L'ED est **linéaire** car le membre de gauche de (1) est une **combinaison linéaire** de  $f(x)$  et  $\frac{df}{dx}(x)$ , c'est-à-dire qu'on additionne  $f(x)$  et  $\frac{df}{dx}(x)$  avec des coefficients constants et qui ne dépendent donc pas de la variable  $x$ . Cela signifie aussi que si on remplaçait  $f(x)$  par  $\lambda f(x)$  dans (1), on obtiendrait une autre ED qui serait obtenue à partir de (1) dans laquelle on multiplierait tout le membre de gauche par  $\lambda$ .

La **résolution** de cette ED consiste à **déterminer la forme générale** des fonctions  $f$  solutions de l'ED (1), c'est-à-dire vérifiant (1). Dire qu'une fonction  $g$ , dont on connaîtrait l'expression en fonction de  $x$ , vérifie l'ED (1), c'est calculer  $\frac{dg}{dx}(x)$  et vérifier que  $a \frac{dg}{dx}(x) + bg(x)$  vaut bien  $\Phi(x)$  pour tout  $x$ . La variable est ici  $x$  mais il est courant en physique que cela soit le temps  $t$ .

### Méthode de résolution

Première étape : on résout l'ED **sans second membre**, aussi appelée **équation homogène** :

$$a \frac{df_H}{dx}(x) + bf_H(x) = 0 \quad , \quad (2)$$

où l'on a introduit la notation  $f_H$  pour désigner la solution générale de l'ED (2) et ainsi la distinguer de la solution générale de l'ED (1). Comme une fonction exponentielle et sa dérivée sont proportionnelles, on recherche la solution générale de (2) sous la forme  $f_H(x) = K \exp(rx)$  où  $K$  et  $r$  sont des constantes. En injectant cette solution dans l'ED (2), on obtient l'**équation caractéristique** associée à l'équation sans second membre

$$ar + b = 0 \quad (3)$$

qui est une équation algébrique du premier degré en l'inconnue  $r$ . On notera que la variable  $x$  n'intervient pas dans l'équation caractéristique. Elle est obtenue en remplaçant dans (2)  $f_H(x)$  par 1 et  $\frac{df_H}{dx}(x)$  par  $r$ .

La résolution de l'équation caractéristique (3) donne  $r = -b/a$ . La solution générale  $f_H$  de l'équation homogène s'écrit donc :

$$f_H(x) = K \exp(rx) = K \exp\left(-\frac{b}{a}x\right) \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{C} \quad . \quad (4)$$

La solution est dite «générale» car elle correspond à une infinité de solutions qui ne diffèrent que par la constante multiplicative  $K$ .

Deuxième étape : on cherche **une solution particulière  $f_P$**  qui vérifie l'ED **avec second membre** (1). Pour cela, on appliquera soit la méthode de ressemblance soit une autre méthode, plus générale, appelée méthode «de la variation de la constante».

**La méthode de ressemblance** consiste à chercher  $f_P$  sous une forme ayant la même dépendance analytique que le second membre  $\Phi$  en la variable de dérivation ( $t$  ou  $x$ ).

**La méthode de la variation de la constante** consiste à supposer que la solution particulière s'écrit comme la solution homogène (4) mais avec  $K(x)$  qui n'est plus constante mais fonction de  $x$  :

$$f_P(x) = K(x) \exp\left(-\frac{b}{a}x\right) \quad (5)$$

En insérant cette expression dans (1), vérifiez que l'on trouve  $\frac{dK}{dx}(x) = \exp\left(\frac{b}{a}x\right) \Phi(x)$  et la solution particulière est alors

$$f_P(x) = \exp\left(-\frac{b}{a}x\right) \int^x \exp\left(\frac{b}{a}t\right) \Phi(t) dt \quad (6)$$

La recherche de  $f_P$  se fait donc au cas par cas. Des exemples explicites, d'une grande importance en physique ou en chimie, seront traités dans les exercices ci-dessous.

Troisième étape : La **solution générale** de l'ED (1) s'écrit alors sous la forme :

$$f(x) = f_H(x) + f_P(x) = K \exp\left(-\frac{b}{a}x\right) + f_P(x) \quad , \quad K \in \mathbb{R} \quad (7)$$

où  $f_H$  est la **solution générale de l'équation homogène associée**, c'est-à-dire de l'ED sans second membre, cf. première étape et solution (4), et  $f_P$  est **une solution particulière de l'équation avec second membre**, cf. deuxième étape.

Remarque : résoudre une ED du premier ordre, qui est une relation entre  $f$  et sa dérivée première, revient en quelque sorte à faire une intégration pour trouver l'expression analytique de  $f$ . Or nous avons vu dans le chapitre 2 que pour une fonction continue donnée, il existe une infinité de primitives de  $f$  qui diffèrent toutes par une constante. Ici, cela se traduit dans (7) par la présence de la constante  $K$ .

Quatrième étape (éventuelle) : les trois étapes ci-dessus correspondent à la détermination de la **solution générale** d'une ED. Comme il y a une infinité de solutions  $f_H$  de l'équation homogène via la constante  $K$ , il y a aussi une infinité de solutions de l'ED avec second membre données par (7).

La donnée d'une condition initiale (si la variable de dérivation est le temps  $t$ ) ou d'une condition limite, dite aussi «condition aux bords» (si la variable de dérivation est une position  $x$ ), permet de déterminer, parmi l'infinité de solutions possibles de l'ED, l'**unique solution** qui vérifie l'ED (1) et la condition initiale/limite donnée.

**Attention** : il faut appliquer la condition initiale ou la condition limite **à la solution générale** (7) de l'ED avec second membre et non pas à la solution générale (4) de l'équation homogène associée.

### 3.1.1 ED sans second membre

Soit l'équation différentielle :

$$\frac{df}{dx}(x) = 4f(x) \quad .$$

- 1) Écrire et résoudre l'équation caractéristique associée.
- 2) En déduire la solution générale de l'équation différentielle.
- 3) On donne  $f(0) = 5$ . Déterminer l'expression de l'unique solution  $f$  de l'équation différentielle vérifiant cette condition initiale.
- 4) Tracer le graphe de  $f$ .

### 3.1.2 Exponentielle complexe

Soient l'équation différentielle et la condition initiale suivantes ( $t$  est le temps donc un réel) :

$$\frac{df}{dt}(t) = if(t) \quad , \quad f(0) = 1 \quad .$$

- 1) Écrire et résoudre l'équation caractéristique associée. En déduire la solution générale de l'équation différentielle.
- 2) En utilisant la condition initiale  $f(0) = 1$ , déterminer l'unique solution de l'équation différentielle vérifiant cette condition initiale.
- 3) Vérifier que la fonction  $\tilde{f} : t \mapsto \tilde{f}(t) = \cos t + i \sin t$  est aussi solution de l'équation différentielle et qu'on a aussi  $\tilde{f}(0) = 1$ . Conclure.

### 3.1.3 ED avec coefficients numérique et second membre constant

Soit l'équation différentielle :

$$\frac{df}{dx}(x) + 3f(x) = -4 \quad .$$

- 1) Écrire l'équation caractéristique associée et déterminer la solution  $f_H$  de l'équation différentielle homogène associée.
- 2) Montrer que la fonction  $f_P(x) = C = \text{cste}$  est solution de l'équation différentielle avec second membre en déterminant la valeur de  $C$ . Écrire la solution générale  $f$  (somme de la solution générale de l'équation différentielle homogène et de la solution particulière) de l'équation différentielle.
- 3) On donne  $f(0) = 2/3$ . Déterminer l'expression de l'unique solution  $f$  de l'équation différentielle vérifiant cette condition aux bords.
- 4) Tracer le graphe de  $f$ .

### 3.1.4 ED avec coefficients littéraux et second membre constant

Soient  $A$  et  $\tau$  deux constantes réelles avec  $A \geq 0$  et  $\tau > 0$ . On considère l'équation différentielle suivante :

$$\frac{df}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}f(t) = A \quad ,$$

où  $t$  représente le temps et  $f$  une grandeur physique réelle.

- 1) Quelle est la dimension de  $\tau$  ?
- 2) Écrire l'équation caractéristique associée et déterminer la solution  $f_H$  de l'équation différentielle homogène associée.
- 3) Montrer que la fonction  $f_P(t) = C$ , où  $C$  une constante, est solution de l'équation différentielle avec second membre en déterminant la valeur de  $C$ .
- 4) En déduire la solution générale  $f$  de l'équation différentielle avec second membre.
- 5) On donne la condition initiale  $f(0) = f_0 > A\tau$ . Déterminer l'expression de l'unique solution  $f$  de l'équation différentielle vérifiant cette condition initiale.
- 6) Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$  et donner l'équation cartésienne de l'asymptote de  $f$  en  $+\infty$ .
- 7) Déterminer l'équation de la tangente à l'origine du graphe de  $f$ .
- 8) Pour quelle valeur de  $t$  la tangente à l'origine coupe-t-elle l'asymptote de  $f$  ?
- 9) En utilisant les résultats obtenus précédemment, tracer qualitativement le graphe de  $f$ . Quel est le comportement de  $f$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$  ?

### 3.1.5 ED avec second membre

Soit l'équation différentielle :

$$\frac{df}{dx}(x) - 2f(x) = 3x \quad (8)$$

avec  $f$  une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

- 1) Déterminer  $f_H$ , solution de l'équation différentielle homogène associée.
- 2) Utiliser la méthode de la constante pour déterminer une solution particulière de (8). On pourra utiliser (ou redémontrer) le résultat de l'exercice 2.5.1.
- 3) On donne  $f(0) = 0$ . Déterminer l'expression de l'unique solution  $f$  de l'équation différentielle vérifiant cette condition aux bords.

### 3.1.6 ED avec second membre sinusoïdal

Soit l'équation différentielle :

$$\frac{df}{dt}(t) + 3f(t) = 2 \cos(\omega t) \quad \text{avec } \omega \neq 0, \quad (9)$$

avec  $f$  une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

- 1) Déterminer  $f_H$ , solution de l'équation différentielle homogène associée.
- 2) On cherche à déterminer  $f_P$ , une solution particulière de (9). Montrer que  $f_P(t) = C \cos(\omega t)$ , avec  $C$  une constante, n'est pas solution.
- 3) Montrer que  $f_P(t) = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)$ , avec  $C$  et  $D$  deux constantes, est bien solution de (9) en déterminant les valeurs de  $C$  et  $D$ .
- 4) Un second membre sinusoïdal permet de rechercher  $f_P$  avec la représentation complexe vue dans le thème 2. On rappelle qu'en représentation complexe,  $\cos(\omega t + \varphi)$  devient  $\exp[i(\omega t + \varphi)]$ . On va ici appliquer la méthode de ressemblance non pas directement sur (9), qui ne fait intervenir que des grandeurs réelles, mais sur une version complexe faisant intervenir la représentation complexe de fonctions sinusoïdales. Plus exactement, on fera les étapes suivantes :
  - (a) Écrire la représentation complexe  $\Phi$  du second membre  $\Phi$ .
  - (b) On cherche  $f_P$  sous la forme  $f_P(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ . En écrire la représentation complexe  $\underline{f}_P(t)$  en faisant apparaître explicitement son amplitude complexe, qu'on notera  $\underline{A}$ .
  - (c) On admet que l'équation différentielle réelle (9) peut s'écrire en version complexe en remplaçant  $f_P$  et  $\Phi$  par leurs représentations complexes respectives. Écrire cette équation différentielle complexe.
  - (d) Montrer que cette équation différentielle se simplifie pour donner une équation algébrique en  $\underline{A}$ . La résoudre.
  - (e) En écrivant  $\underline{A}$  et  $\exp[i\omega t]$  sous leur forme algébrique, calculer la partie réelle de  $\underline{f}_P(t)$ . Quel est le lien avec  $f_P(t)$ ? Retrouver l'expression de  $f_P(t)$  déterminée à la question 3).
- 5) Écrire la solution générale de l'équation différentielle (9).

## 3.2 ED du deuxième ordre homogène

### Définitions et notations

Une **équation différentielle (ED) linéaire du deuxième ordre à coefficients constants homogène** (ou sans second membre) est une équation de la forme :

$$a \frac{d^2 f}{dt^2}(t) + b \frac{df}{dt}(t) + cf(t) = 0, \quad (10)$$

où  $f$  est une fonction de la variable réelle  $t$ ,  $\frac{df}{dt}$  et  $\frac{d^2f}{dt^2}$  sont respectivement sa dérivée première et sa dérivée seconde par rapport à  $t$ ,  $a \neq 0$ ,  $b$  et  $c$  sont des constantes de  $\mathbb{R}$  ou de  $\mathbb{C}$  (elles ne dépendent donc pas de la variable  $t$ ).

La dérivée seconde de  $f$  peut aussi s'écrire  $f''$  ou  $\ddot{f}$  (dans le cas où la variable de dérivation est le temps  $t$ ). La **résolution** de cette ED consiste à **déterminer la forme générale** des fonctions  $f$  solutions de l'ED (1), c'est-à-dire vérifiant (1). Dire qu'une fonction  $g$ , dont on connaîtrait l'expression en fonction de  $t$ , vérifie l'ED (1), c'est calculer  $\frac{dg}{dt}(t)$  et  $\frac{d^2g}{dt^2}(t)$ , et vérifier que  $a\frac{d^2g}{dt^2}(t) + b\frac{dg}{dt}(t) + cg(t)$  vaut bien 0  $\forall t$ .

### Méthode de résolution

Comme dans le cas d'équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1, on cherche  $f$  sous la forme d'une exponentielle :  $f(t) = K \exp(rt)$  où  $K$  et  $r$  sont des constantes. En injectant dans l'ED 10, on obtient l'**équation caractéristique** associée à cette ED qui est une équation du second degré en  $r$  (donc indépendante de la variable  $t$ ) :

$$ar^2 + br + c = 0 \quad .$$

Elle est obtenue en remplaçant dans (10)  $f(t)$  par 1,  $\frac{df}{dt}(t)$  par  $r$  et  $\frac{d^2f}{dt^2}(t)$  par  $r^2$ .

Elle admet toujours deux solutions, distinctes ou égales, et éventuellement complexes si son discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$  est négatif ou si  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des complexes. Dans le cadre de ce thème, on considérera que les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont réels. Dans ce cas, on distingue les 3 cas suivants.

#### • 2 racines complexes distinctes : cas où $\Delta < 0$ .

L'équation caractéristique admet deux racines complexes  $r_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$  et  $r_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ . La solution générale (réelle) de l'ED (10) s'écrit :

$$f(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad \text{où } C_1, C_2 \text{ sont des constantes complexes.}$$

Les coefficients  $C_1$ ,  $C_2$ , aussi bien que les exponentielles, sont des *nombre complexes*. Du fait que, dans ce chapitre, nous ne traiterons que du cas où les coefficients de l'ED (10) sont des réels, les solutions de l'équation caractéristique  $r_1$  et  $r_2$  sont des nombres complexes conjugués<sup>3</sup> qu'on écrit  $r_1 = \lambda + i\omega$  et  $r_2 = \lambda - i\omega$  avec  $\lambda, \omega \in \mathbb{R}$ . Dans ces conditions,  $f(t)$  s'écrit aussi :

$$f(t) = \exp(\lambda t) [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \quad \text{où } A, B \text{ sont des constantes réelles.}$$

$f(t)$  s'écrit donc comme le produit de  $e^{\lambda t}$ , exponentielle *réelle*, par  $[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$ , fonction trigonométrique de période  $T = 2\pi/\omega$ . L'effet de  $e^{\lambda t}$  est de diminuer (si  $\lambda < 0$ ) ou d'augmenter (si  $\lambda > 0$ ) l'amplitude de la fonction trigonométrique au cours du temps. On dit alors qu'on est dans un **régime pseudo-périodique**, de pseudo-période  $T$ , à cause de cette modulation de l'amplitude au cours du temps.

#### • 2 racines réelles distinctes : cas où $\Delta > 0$ .

L'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes  $r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ . La solution générale de l'ED (10) s'écrit :

$$f(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad \text{où } C_1 \text{ et } C_2 \text{ sont des constantes réelles.}$$

$f$  est donc la somme de deux exponentielles réelles. Il n'y a pas de pseudo-périodicité. Donc, par opposition au cas où l'on a deux racines complexes conjuguées, on parle ici de **régime apériodique**.

#### • 1 racine réelle double : cas où $\Delta = 0$ .

L'équation caractéristique admet une seule racine double  $r = -\frac{b}{2a}$ . La solution générale de l'ED (10) s'écrit :

---

3. On a aussi la relation  $C_1 = \overline{C_2}$ , assurant le fait que la fonction  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

$$f(t) = (C_1 + C_2 t)e^{rt} \quad \text{où } C_1 \text{ et } C_2 \text{ sont des constantes réelles.}$$

On peut retrouver  $f$  en partant du cas où l'on a deux racines réelles distinctes et en regardant la limite quand  $r_1 \rightarrow r_2$ . C'est, entre autres, pour cette raison que le cas avec une seule racine réelle double est appelé **régime critique**.

### Détermination éventuelle des deux constantes $C_1$ et $C_2$

Dans la résolution d'une ED du premier ordre, la solution générale comporte une constante quelconque. Pour la déterminer, il est nécessaire de disposer d'une condition initiale ou limite.

Pour résoudre une ED du deuxième ordre, relation entre  $f$  et sa dérivée seconde, il y a en principe deux intégrations à faire pour obtenir l'expression analytique de  $f$ , d'où la présence des deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  dans la solution générale de l'ED (10). Comme elles sont quelconques, il y a une infinité de solutions. La donnée de **deux conditions initiales** ou conditions limites permet de déterminer, parmi l'infinité de solutions possibles de l'ED, l'**unique solution** qui vérifie l'ED (1) et les deux conditions initiales/limites données.

Remarque : dans cette UE, nous ne considérerons que le cas **homogène**, c'est-à-dire **sans second membre**. Plus généralement, on peut avoir un second membre non nul et donc avoir à résoudre une ED de la forme :  $a \frac{d^2 f}{dt^2}(t) + b \frac{df}{dt}(t) + cf(t) = \Phi(t)$  où  $\Phi$  est une fonction connue. La méthode de résolution est en principe la même que pour une ED du premier ordre : on détermine d'abord la solution générale  $f_H$  de l'équation homogène associée (avec la méthode décrite ci-dessus suivant le signe du discriminant de l'équation caractéristique) puis une solution particulière  $f_P$  de l'ED avec second membre par exemple par la méthode de ressemblance. Enfin la solution générale de l'ED avec second membre est la somme des deux :  $f(t) = f_H(t) + f_P(f)$ .

### 3.2.1 Détermination de solutions générales

Pour les ED ci-dessous, écrire l'équation caractéristique associée et déterminer la solution générale de l'ED.

- 1)  $\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 2 \frac{df(t)}{dt} + f(t) = 0$
- 2)  $\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 2 \frac{df(t)}{dt} + 5 f(t) = 0$
- 3)  $\frac{d^2 f}{dx^2}(x) + 3 \frac{df}{dx}(x) + 2f(x) = 0$

### 3.2.2 Détermination d'une solution unique

On considère l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) + 4 \frac{df}{dx}(x) + 4f(x) = 0 \quad .$$

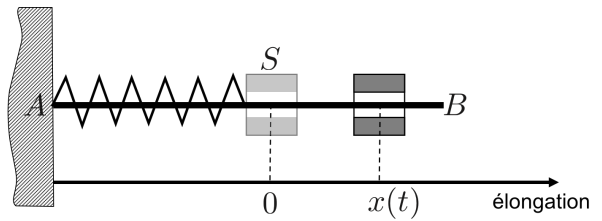
- 1) Écrire l'équation caractéristique associée et déterminer la solution générale de l'équation différentielle.
- 2) On donne les deux conditions aux bords  $f(0) = 1$  et  $\frac{df}{dx}(0) = -1$ . Déterminer l'expression de l'unique solution de l'équation différentielle vérifiant ces deux conditions aux bords.
- 3) Quel est le comportement de cette solution quand  $x \rightarrow \infty$  ?



### 3.2.3 Oscillations libres d'un système masse-ressort

Un objet  $S$  assimilé à un point matériel de masse  $m$ , accroché à l'extrémité d'un ressort horizontal dont l'autre extrémité est fixe, est contraint d'osciller sans frottement le long d'une tige parallèle avec l'axe  $(Ox)$ . Son poids étant compensé par la réaction de la tige, cet objet n'est soumis qu'à deux forces :

- la force de rappel du ressort, proportionnelle à l'allongement du ressort par rapport à sa longueur à vide,
- une force de frottement visqueux, due au fluide dans lequel oscille le mobile (l'air par exemple). Cette force est opposée à la vitesse de  $S$  et proportionnelle à celle-ci.



L'objet  $S$ , déplacé de sa position d'équilibre d'abscisse  $x = 0$  jusqu'à la position initiale  $x_0$ , est relâché à l'instant  $t = 0$ . Les lois de la mécanique permettent de décrire l'oscillation du mobile au cours du temps autour de sa position d'équilibre et d'établir que sa position  $x$  vérifie une équation du type :

$$m \ddot{x} + \mu \dot{x} + kx = 0 \quad (11)$$

où  $\mu$  est le coefficient de frottement visqueux ( $> 0$ ) et  $k$ , la constante de raideur du ressort ( $> 0$ ).

L'oscillation du système n'est pas imposée par un dispositif qui excite le ressort, ce qui se traduit par le fait que le second membre de l'équation (11) est nul (équation homogène). On parle alors d'**oscillations libres**.

- 1) Amortissement négligeable ( $\mu = 0$ ) : oscillations libres non amorties

L'équation (11) devient

$$m \ddot{x} + kx = 0 \quad (12)$$

- Écrire l'équation caractéristique associée à cette équation homogène.
- Déterminer l'expression du discriminant  $\Delta$  de l'équation caractéristique et résoudre l'équation caractéristique (note : il n'est pas forcément nécessaire de calculer le discriminant pour trouver la racine).
- Montrer alors que la solution générale de l'équation différentielle (12) peut s'écrire :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = C_1 \cos(\omega_0 t + \varphi) = C_2 \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (13)$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\varphi$  et  $\phi$  sont des constantes réelles. On donnera l'expression de  $\omega_0$  en fonction des constantes du problème, son unité et ainsi que celle de  $\varphi$ .

- 2) Amortissement non négligeable ( $\mu \neq 0$ ) : oscillations libres amorties

- Montrer que l'équation 11 peut s'écrire :

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (14)$$

et donner l'expression de  $\tau$  et son unité.

- Écrire l'équation caractéristique associée à cette équation différentielle.
- Amortissement critique :

Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (14) dans le cas où le discriminant de l'équation caractéristique est nul. Montrer que dans ce cas, l'amortissement, que l'on dénommera amortissement critique, est tel que  $\mu_c^2 = 4km$ . Montrer alors que l'objet  $S$  atteint sa position d'équilibre  $x = 0$  sans osciller lorsque  $t$  tend vers l'infini.

(d) Amortissement fort – régime aperiodique :

Montrer que le discriminant de l'équation caractéristique est strictement positif quand  $\mu^2 > 4 k m$ , c'est-à-dire quand l'amortissement est plus grand que l'amortissement critique. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle en fonction des constantes positives  $\lambda$  et  $\beta$  définies par :

$$\lambda = \frac{1}{2\tau} \quad \text{et} \quad \beta = \omega_0 \sqrt{\frac{\mu^2}{\mu_c^2} - 1} \quad .$$

Montrer alors que l'objet  $S$  atteint sa position d'équilibre  $x = 0$  sans osciller lorsque  $t$  tend vers l'infini.

(e) Amortissement faible – régime pseudo-périodique :

- a) Dans le cas où l'amortissement est plus petit que l'amortissement critique, déterminer la solution générale de l'équation différentielle en fonction de la constante  $\lambda$  précédemment définie et de la constante positive  $\omega$  définie par :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{\mu_c^2}} \quad .$$

- b) En remarquant que les coefficients de l'équation (14) à résoudre sont réels, vérifier que la solution générale  $x$  de l'équation différentielle peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp(-\lambda t) [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \\ \text{ou } x(t) &= C_1 \exp(-\lambda t) \cos(\omega t + \varphi) \\ \text{ou } x(t) &= C_2 \exp(-\lambda t) \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

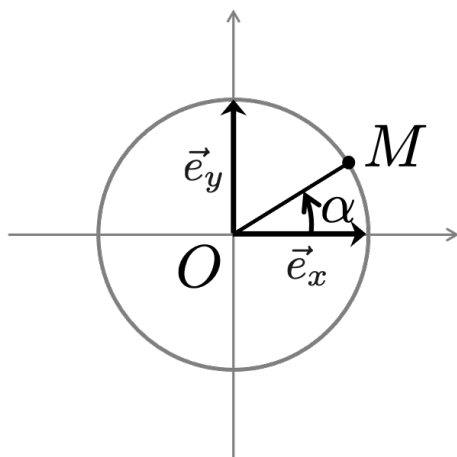
avec  $A, B, C_1, C_2, \varphi$  et  $\phi$  des constantes réelles.

- c) Vérifier alors que l'objet  $S$  atteint sa position d'équilibre  $x = 0$  en oscillant à une pulsation  $\omega$  légèrement inférieure à la pulsation  $\omega_0$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.

# Chapitre 4 : Manipulations de vecteurs dans le plan et l'espace

## 4.1 Trigonométrie

Dans le plan usuel muni du repère  $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ , le **cercle trigonométrique** est un cercle de rayon 1, de centre  $O$  et orienté dans le sens anti-horaire (sens trigonométrique).



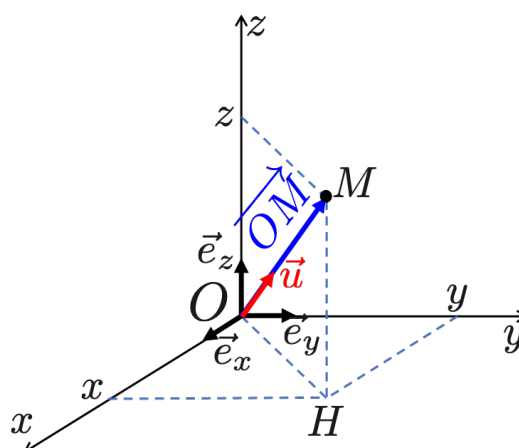
- 1) Définir les coordonnées d'un point  $M$  du cercle trigonométrique en complétant le schéma ci-contre. Ajouter l'axe des tangentes et  $\tan \alpha$ . Placer  $\tan(\alpha + \pi)$ .
- 2) En utilisant le cercle trigonométrique, rappeler les valeurs de  $\sin \alpha$  et  $\cos \alpha$  pour  $\alpha = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$  et  $\pi$ . En déduire  $\tan \alpha$ .
- 3) En utilisant le cercle trigonométrique, vérifier que :

$$\begin{aligned}\cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha\end{aligned}$$

## 4.2 Repérage cartésien dans l'espace

Dans l'espace, on considère le **repère cartésien**  $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , représenté sur la figure ci-contre. Les trois vecteurs  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$  sont linéairement indépendants (on dit aussi libres ou non liés) : aucun d'entre eux n'est une combinaison linéaire des deux autres. On dit alors que le triplet de vecteurs  $\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  forme une base de l'espace. De plus, chacun de ces vecteurs est de norme 1 (on dit aussi unitaire) et ils sont deux à deux orthogonaux. On parle alors de base **orthonormée**. Enfin, les vecteurs sont positionnés comme sur la figure, c'est-à-dire  $\vec{e}_x$  vers vous,  $\vec{e}_y$  vers votre droite et  $\vec{e}_z$  vers le haut. Cette orientation relative fait que la base est **directe**. Cette notion sera précisée à la section 4.5.



À un point  $M$  de l'espace, on peut associer le vecteur-position  $\overrightarrow{OM}$ . Les grandeurs réelles  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont les **coordonnées cartésiennes** du point  $M$  dans le repère cartésien  $\mathcal{R}$  mais aussi les **composantes cartésiennes** du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  dans la base cartésienne  $\mathcal{B}$ . On utilisera les notations suivantes :

$$\begin{array}{c|c} M & \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \\ \hline \mathcal{R} & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c|c} \overrightarrow{OM} & \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \\ \hline \mathcal{B} & \end{array} = \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

On indique pour le point  $M$  le repère  $\mathcal{R}$  dans lequel on exprime ses coordonnées cartésiennes en bas à gauche de l'écriture en colonne. On indique pour le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  la base  $\mathcal{B}$  dans lequel on exprime ses composantes cartésiennes en bas à gauche de l'écriture en colonne. Cette écriture en colonne est équivalente à l'égalité vectorielle  $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$  qui exprime  $\overrightarrow{OM}$  comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base  $\mathcal{B}$ . S'il n'y a pas d'ambiguïté, on pourra noter, pour gagner de la place, les coordonnées cartésiennes du point  $M$  sous la forme d'un triplet,  $M(x, y, z)$ , et les composantes cartésiennes du vecteur

$\overrightarrow{OM}$  également sous forme de triplet  $(x, y, z)$ .

La **norme** du vecteur  $\|\overrightarrow{OM}\|$  vaut  $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Le **vecteur unitaire**  $\vec{u}$  porté par la droite  $(OM)$ , dans le même sens que le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  (cf. figure de la page précédente), s'écrit :  $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ .

Par construction, sa norme vaut 1.

Le déplacement élémentaire de  $M(x, y, z)$  au point infiniment proche  $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$  avec  $dx, dy, dz$  les distances infinitésimales algébriques est

$$d\vec{\ell} = \overrightarrow{MM'} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z \quad (15)$$

Le volume élémentaire du parallélépipède de grande diagonale  $\|\overrightarrow{MM'}\|$  est alors

$$d^3V = d\ell_x d\ell_y d\ell_z = dx dy dz \quad (16)$$

#### 4.2.1 Exercice d'application

Dans le repère cartésien  $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , on considère trois points dont on donne les coordonnées cartésiennes ci-après :  $M_1(2, 3, 4)$ ,  $M_2(-2, -4, -1)$  et  $M_3(2, 0, 1)$ .

- 1) Représenter sur un schéma 3D le repère cartésien et les 3 points. Dans quel plan se trouve le point  $M_3$  ?
- 2) Écrire le vecteur  $\overrightarrow{OM_2}$  sous forme de vecteur-colonne puis de combinaison linéaire de  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$ . Même question pour le vecteur  $\overrightarrow{M_1M_3}$ .
- 3) Déterminer  $\vec{u}$ , vecteur unitaire de mêmes direction et sens que  $\overrightarrow{OM_2}$ .
- 4) Soit  $M_4$  le point tel que  $\overrightarrow{M_3M_4} = -2\vec{e}_x + \vec{e}_y$ . Déterminer les coordonnées cartésiennes de  $M_4$ . À quel plan appartient-il ?

### 4.3 Produit scalaire de deux vecteurs

Soient les vecteurs  $\overrightarrow{OM_1}$  et  $\overrightarrow{OM_2}$ . On note leurs composantes cartésiennes dans la base cartésienne  $\mathcal{B}$  par :

$$\overrightarrow{OM_1} = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM_2} = \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Le **produit scalaire**  $\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2}$  de ces deux vecteurs est le **scalaire** (ici, un nombre réel) donné par :

$$\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = \|\overrightarrow{OM_1}\| \times \|\overrightarrow{OM_2}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}})$$

La notation  $\cdot$  sera réservée au produit scalaire entre deux vecteurs et ne devra donc pas être utilisée pour indiquer la multiplication entre 2 nombres afin d'éviter toute confusion.

Le produit scalaire est commutatif :  $\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_2} \cdot \overrightarrow{OM_1}$ .

#### 4.3.1 Détermination de l'angle entre deux vecteurs

Soient  $A$  et  $B$  deux points de l'espace muni du repère cartésien  $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . On donne les coordonnées cartésiennes  $A(1 + \sqrt{3}, \sqrt{3} - 1, 0)$  et  $B(2, 2, 0)$ .

- 1) Dans quel plan se trouvent les points  $A$  et  $B$  ? Les représenter sur un schéma. On prendra  $\sqrt{3} \simeq 1,73$ .
- 2) Calculer les normes  $\|\overrightarrow{OA}\|$  et  $\|\overrightarrow{OB}\|$ .
- 3) Calculer le produit scalaire  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ .
- 4) Dédire des deux questions précédentes la valeur absolue de l'angle entre les vecteurs  $\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{OB}$ . D'après le schéma, quel est le signe de cet angle ?

### 4.3.2 Projection orthogonale et produit scalaire

On munit le plan du repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ . On considère trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  de coordonnées cartésiennes respectives  $(-4, -3)$ ,  $(6, 2)$  et  $(0, 4)$  dans  $\mathcal{R}$ .

- 1) Représenter sur un schéma  $\mathcal{R}$ , les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ , ainsi que le vecteur  $\vec{AH}$ , projection orthogonale du vecteur  $\vec{AC}$  sur le vecteur  $\vec{AB}$ .
- 2) Exprimer le produit scalaire  $\vec{AC} \cdot \vec{AB}$  en fonction des normes de  $\vec{AC}$  et  $\vec{AB}$ . En déduire une expression de ce produit scalaire en fonction des normes de  $\vec{AH}$  et  $\vec{AB}$  et calculer la norme de  $\vec{AH}$ .
- 3) Exprimer le vecteur  $\vec{AH}$  en fonction de  $\vec{AB}$ . En déduire les coordonnées du point  $H$ .

## 4.4 Produit vectoriel de deux vecteurs

Soient les vecteurs  $\vec{OM_1}$  et  $\vec{OM_2}$ . On note leurs composantes cartésiennes dans la base cartésienne  $\mathcal{B}$  comme :

$$\vec{OM_1} = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad \vec{OM_2} = \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Le **produit vectoriel** de  $\vec{OM_1}$  par  $\vec{OM_2}$ , noté  $\vec{OM_1} \wedge \vec{OM_2}$ , est le **vecteur** dont les composantes cartésiennes sont données par :

$$\vec{OM_1} \wedge \vec{OM_2} = \begin{vmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Il existe au moins 3 méthodes pour calculer les composantes cartésiennes d'un produit vectoriel. Par exemple, on peut utiliser celle basée sur la règle « gamma/gamma inversé/gamma » dans laquelle on «cache» successivement une ligne :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \wedge = \begin{vmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ - \\ - \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \wedge = \begin{vmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ x_2 z_1 - z_2 x_1 \\ - \end{vmatrix} \quad \text{« gamma inversé »}$$

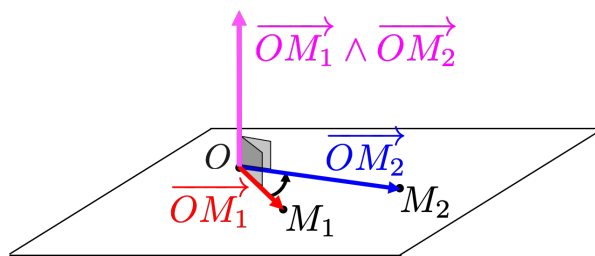
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \wedge = \begin{vmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ x_2 z_1 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{vmatrix}$$

La second méthode est très proche : il n'y a pas inversion du gamma pour la deuxième composante mais on se souviendra qu'il faut multiplier par  $(-1)$ . La règle est donc « +gamma/-gamma/+gamma ».

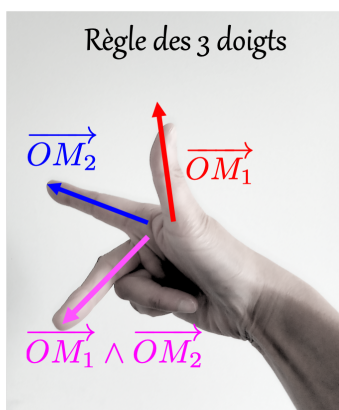
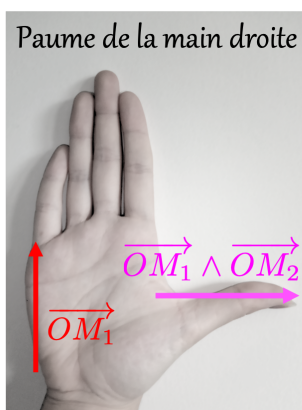
La troisième méthode nécessite d'écrire des lignes en plus et est décrite sur wikipedia : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Produit\\_vectoriel#/media/Fichier:Technique\\_de\\_calcul\\_du\\_produit\\_vectoriel.gif](https://fr.wikipedia.org/wiki/Produit_vectoriel#/media/Fichier:Technique_de_calcul_du_produit_vectoriel.gif)

Le produit vectoriel n'est pas commutatif :  $\vec{OM_1} \wedge \vec{OM_2} = -(\vec{OM_2} \wedge \vec{OM_1})$ , comme on peut le vérifier sur les composantes données ci-dessus.

Le produit vectoriel permet d'orienter l'espace, comme illustré dans la figure ci-contre. En effet, on considère le plan qui passe par les trois points  $O$ ,  $M_1$  et  $M_2$  (ce plan existe toujours car trois points sont toujours coplanaires). Ce plan contient donc les vecteurs  $\overrightarrow{OM_1}$  et  $\overrightarrow{OM_2}$ . Alors le produit vectoriel  $\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}$  est perpendiculaire à ce plan (cf. angles droits indiqués en gris sur la figure). En particulier, il est **orthogonal** à  $\overrightarrow{OM_1}$  et à  $\overrightarrow{OM_2}$ . Le sens de  $\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}$  permet de définir le demi-espace qui est au-dessus de ce plan (et donc également le demi-espace qui est en-dessous).



Il existe plusieurs moyens mnémotechniques pour trouver rapidement l'orientation du produit vectoriel.



Les images ci-contre vous montrent deux d'entre elles. L'important est de toujours utiliser sa main **droite**. Par exemple, avec la paume de la main droite, sur l'exemple montré dans le schéma de la page précédente, on pose la tranche de sa main droite sur  $\overrightarrow{OM_1}$  et on balaie avec l'**intérieur** de la paume l'angle pour aller de  $\overrightarrow{OM_1}$  vers  $\overrightarrow{OM_2}$  (cf. angle orienté indiqué sur le schéma ci-dessus). Alors le pouce indique le sens du produit vectoriel  $\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}$ . Avec la règle des 3 doigts, le pouce représente  $\overrightarrow{OM_1}$ , l'index  $\overrightarrow{OM_2}$  et le majeur  $\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}$ .

La **norme** du produit vectoriel est donnée par :

$$\|\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}\| = \|\overrightarrow{OM_1}\| \times \|\overrightarrow{OM_2}\| \times \left| \sin \left( \widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}} \right) \right| \quad (17)$$

Géométriquement, cette norme vaut l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\overrightarrow{OM_1}$  et  $\overrightarrow{OM_2}$ .

#### 4.4.1 Détermination de l'angle entre deux vecteurs

On munit l'espace du repère cartésien  $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . Soient  $A$  et  $B$  deux points de l'espace de coordonnées cartésiennes respectives  $(1 + \sqrt{3}, \sqrt{3} - 1, 0)$  et  $(2, 2, 0)$ .

- 1) Calculer les composantes cartésiennes de  $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ .
- 2) Vérifier que ce produit vectoriel n'est pas commutatif.
- 3) Suivant quelle direction ce produit vectoriel est-il ? Pourquoi était-ce prévisible ?
- 4) Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{OB}$ .
- 5) À partir de la norme de  $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ , quelles sont les valeurs possibles de l'angle entre les vecteurs  $\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{OB}$  ? Comparer aux valeurs obtenues dans l'exercice 4.3.1 .

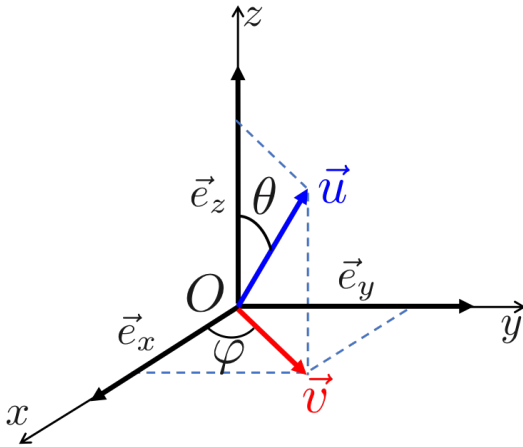
#### 4.4.2 Aire de parallélogrammes

L'espace est muni du repère cartésien  $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

- 1) Soient les deux vecteurs  $\overrightarrow{OA} = 2\vec{e}_x$  et  $\overrightarrow{OB} = \vec{e}_x + \vec{e}_y$ . Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{OB}$ .
- 2) Même question avec les vecteurs  $\overrightarrow{OA'} = 2\vec{e}_x - 3\vec{e}_y$  et  $\overrightarrow{OB'} = 4\vec{e}_x - 6\vec{e}_y$ .

### 4.4.3 Projection orthogonale d'un vecteur unitaire de l'espace

L'espace est muni du repère cartésien  $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . Soit un vecteur  $\vec{u}$  unitaire et non colinéaire à  $\vec{e}_z$ . On définit le vecteur  $\vec{v}$  comme le projeté de  $\vec{u}$  sur le plan  $(Oxy)$ . On considérera que les angles  $\theta$  et  $\varphi$  sont entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  comme sur le schéma ci-dessous.



- 1) Exprimer le vecteur  $\vec{v}$  en fonction de  $\|\vec{v}\|$  et  $\varphi$  dans la base associée au repère  $\mathcal{R}$ .
- 2) Exprimer le vecteur  $\vec{u}$  en fonction de  $\vec{v}$ ,  $\vec{e}_z$  et  $\theta$ .
- 3) Exprimer le vecteur  $\vec{u}$  dans la base associée au repère  $\mathcal{R}$  en fonction de  $\|\vec{v}\|$ ,  $\varphi$  et  $\theta$ .
- 4) Exprimer la norme de  $\vec{u}$  en utilisant la question précédente. En déduire la norme de  $\vec{v}$ .
- 5) Calculer le produit vectoriel  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ .
- 6) Exprimer l'angle  $(\vec{u}, \vec{v})$  en utilisant les questions précédentes.

### 4.4.4 Produit scalaire, produit vectoriel et formules trigonométriques

On munit l'espace du repère orthonormé direct  $\mathcal{R} (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . On considère sur le cercle trigonométrique  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et de rayon unité deux points  $M$  et  $N$  tels que  $\alpha = \widehat{(\vec{e}_x, \vec{OM})}$  et  $\beta = \widehat{(\vec{e}_x, \vec{ON})}$ .

- 1) Expliciter  $\vec{OM}$  et  $\vec{ON}$  dans la base associée au repère  $\mathcal{R}$ .
- 2) Calculer le produit scalaire  $\vec{OM} \cdot \vec{ON}$ . En déduire l'expression de  $\cos(\alpha - \beta)$ . En déduire l'expression de  $\cos(\alpha + \beta)$ .
- 3) Calculer le produit vectoriel  $\vec{OM} \wedge \vec{ON}$ . En déduire l'expression de  $\sin(\alpha - \beta)$ . En déduire l'expression de  $\sin(\alpha + \beta)$ .
- 4) Dédire des résultats précédents une expression de  $\cos \alpha \cos \beta$  ne faisant pas intervenir de produits de cosinus ou de sinus.

## 4.5 Bases orthonormées directes

Une famille de 3 vecteurs  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  forme une base de l'espace si et seulement s'ils sont linéairement indépendants. De plus, on dit qu'elle est **orthonormée directe** si et seulement si :

$$\begin{cases} \text{Chaque vecteur est } \mathbf{unitaire} \\ \text{Les 3 vecteurs sont deux à deux } \mathbf{orthogonaux} \\ \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \end{cases}$$

Remarques :

- On a aussi les relations  $\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$  et  $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1$ .
- La base cartésienne  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  est orthonormée directe.
- On dit d'un repère muni d'une base orthonormée directe qu'il est lui aussi orthonormé direct.

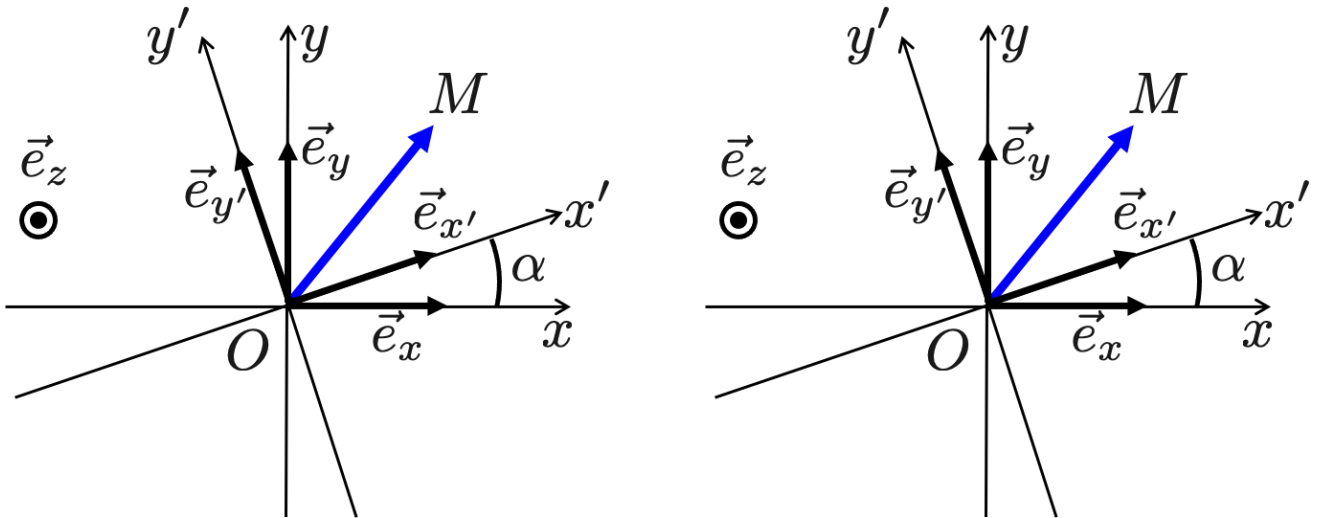
#### 4.5.1 Détermination d'une base orthonormée directe

Soient deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de composantes cartésiennes respectives  $(1/3, 2/3, 2/3)$  et  $(2/3, -2/3, 1/3)$  dans la base cartésienne  $\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

- 1) Montrer que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont unitaires et orthogonaux.
- 2) Déterminer les composantes du vecteur unitaire  $\vec{w}$  pour que la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  soit une base orthonormée directe.

#### 4.5.2 Rotation d'une base orthonormée directe

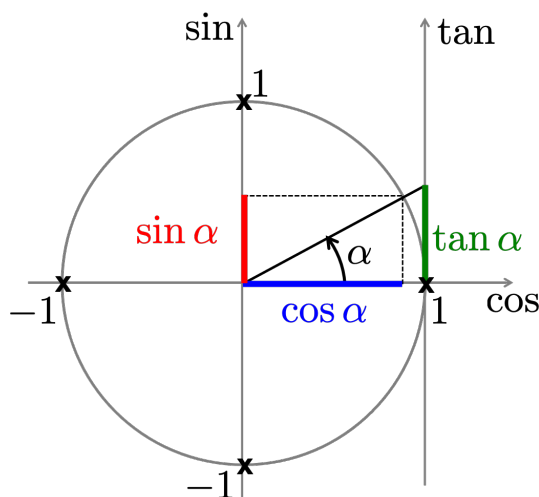
On considère la base cartésienne  $\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  et on en effectue une rotation d'angle  $\alpha > 0$  autour de l'axe  $z$ . On obtient ainsi une autre base orthonormée directe  $\mathcal{B}' = (\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_z)$ . On notera que les troisièmes vecteurs de  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont identiques : c'est le vecteur  $\vec{e}_z$ , symbolisé par  $\odot$  sur les schémas ci-dessous (ils sont identiques) qui montrent  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  en projection dans le plan  $(Oxy)$ .



- 1) Tracer sur le schéma de gauche les projections adéquates pour exprimer les vecteurs  $\vec{e}_{x'}$  et  $\vec{e}_{y'}$  dans la base  $\mathcal{B}$  en fonction de l'angle  $\alpha$  entre les vecteurs  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_{x'}$ .
- 2) Sur le schéma de droite, tracer les projections qui permettent d'exprimer les vecteurs  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  dans la base  $\mathcal{B}'$  en fonction de l'angle  $\alpha$ .
- 3) Calculer les produits scalaires  $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_{x'}$  et  $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_{y'}$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ . Conclure.
- 4) Le point  $M$  a pour coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  dans le repère  $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  et  $(x', y', z')$  dans le repère  $\mathcal{R}' = (O, \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_z)$ . On a  $z' = z$ . Exprimer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x, y$  et  $\alpha$ .



## Fonctions trigonométriques sur le cercle trigonométrique



### Moyens mnémotechniques pour retenir les 2 formules trigonométriques de base

«cos = coco - sisi»    ce qui veut dire     $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$   
 et on en déduit     $\cos(a - b)$  en remarquant que c'est égal à  $\cos(a + (-b))$

«sin = sico + cosi»    ce qui veut dire     $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$   
 et on en déduit     $\sin(a - b)$  en remarquant que c'est égal à  $\sin(a + (-b))$

Il faut absolument connaître ces 2 relations de base. Toutes les autres formules trigonométriques données ci-dessous sont aussi à connaître. Mais elles peuvent se déduire de ces 2 relations de base et/ou de l'utilisation du cercle trigonométrique.

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\begin{aligned}\cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \cos(2\alpha) &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(a - b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a - b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \sin(2\alpha) &= 2 \sin \alpha \cos \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos a \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)] \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin a \sin b &= \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)] \\ \cos a \sin b &= \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)]\end{aligned}$$

# Chapitre 5 : Repérages dans l'espace et systèmes de coordonnées

Dans le chapitre précédent, on a exclusivement travaillé dans le repérage cartésien. Cependant, suivant la symétrie du problème, il est souvent plus judicieux d'utiliser d'autres repérages car les calculs peuvent alors être plus commodes à mener. Deux exemples sont particulièrement importants : le repérage cylindrique et le repérage sphérique.

## 5.1 Repérage cylindrique

On considère le repère cartésien  $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  dans lequel un point  $M$  est repéré par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ . On note  $H$  la projection orthogonale du point  $M$  sur le plan  $(Oxy)$ . Le point  $M$  peut aussi être repéré par le triplet cylindrique  $(\rho, \varphi, z)$  défini par :

$$\rho = OH \quad , \quad \varphi = \widehat{(\vec{e}_x, \vec{OH})} \quad , \quad z = \overline{HM}$$

On appelle **base cylindrique** la base orthonormée directe  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$  dans laquelle :

- $\vec{e}_\rho = \frac{\vec{OH}}{\|\vec{OH}\|}$  (l'angle  $\widehat{(\vec{e}_x, \vec{e}_\rho)}$  est donc égal à  $\varphi$ )
- $\vec{e}_\varphi$  est tel que  $\widehat{(\vec{e}_x, \vec{e}_\varphi)} = \varphi + \frac{\pi}{2}$
- $\vec{e}_z$  est le même qu'en cartésien

L'orientation de l'espace donnant le signe de l'angle  $\varphi$  est fixée par la direction du vecteur  $\vec{e}_z$  et la règle des 3 doigts de la main droite. La base cylindrique  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$  est une base **locale** (on dit aussi mobile ou tournante) car elle dépend du point  $M$  considéré, contrairement à la base cartésienne  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  qui est une base **fixe** (les vecteurs de cette base ne changent pas quand  $M$  se déplace). Le repère cylindrique associé au point  $M$  est  $(M, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ .

On a alors

$$\boxed{\vec{OM} = \vec{OH} + \vec{HM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z} \quad (18)$$

Le déplacement élémentaire de  $M(\rho, \varphi, z)$  au point infiniment proche  $M'(\rho + d\rho, \varphi + d\varphi, z + dz)$  avec  $d\rho, d\varphi, dz$  les variations infinitésimales algébriques est

$$\boxed{d\vec{l} = \vec{MM'} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + dz \vec{e}_z} \quad (19)$$

En effet la distance de l'arc de cercle infinitésimal de rayon  $\rho$  et d'angle  $d\varphi$  est bien  $\rho d\varphi$ .

Le volume élémentaire de la calotte cylindrique de grande diagonale  $\|\vec{MM'}\|$  est alors

$$\boxed{d^3V = d\rho d\varphi dz = \rho d\rho d\varphi dz} \quad (20)$$

### 5.1.1 Repérage polaire

Un cas particulier du repérage cylindrique est le cas où  $z = 0$ . On travaille alors dans le plan  $(Oxy)$  et on parle de base polaire  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ .

Soit un point  $H$  du plan. Il est repéré soit par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ , soit par ses coordonnées polaires  $(\rho, \varphi)$ .

- 1) Représenter sur un schéma le point  $H$ , ses coordonnées cartésiennes et polaires, ainsi que les deux bases  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  et  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ .

- 2) Déterminer les relations entre  $(x, y)$  et  $(\rho, \varphi)$  et *vice versa*.
- 3) Exprimer les vecteurs de la base polaire  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$  en fonction des vecteurs de la base cartésienne  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ .
- 4) Déterminer les composantes polaires du vecteur  $\vec{OH}$ , c'est-à-dire les composantes dans la base locale  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ . Que devient cette base locale lorsqu'on fait varier  $\rho$  en maintenant  $\varphi$  constante ? Même question quand on fait varier  $\varphi$  en maintenant  $\rho$  constant.
- 5) Soient  $H_A$  et  $H_B$  deux points du plan de coordonnées cartésiennes respectives  $(1, 1)$  et  $(-1, 1)$ . Faire un schéma avec le repère cartésien  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ , les deux points  $H_A$  et  $H_B$ , ainsi que les bases polaires associées à chacun de ces deux points. Déterminer les composantes polaires des vecteurs  $\vec{OH}_A$  et  $\vec{OH}_B$ . Conclure.
- 6) Soit  $H_C$  le point de coordonnées polaires  $\rho_C = 2$  et  $\varphi_C = \pi/3$ . Placer ce point sur le schéma précédent. Déterminer ses coordonnées cartésiennes  $x_C$  et  $y_C$ .

### 5.1.2 Relations entre repérages cartésien et cylindrique

Soit  $M$  un point quelconque de l'espace et  $H$  sa projection orthogonale sur le plan  $(Oxy)$ .

- 1) Représenter sur un schéma les deux bases  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  et  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$  en faisant apparaître clairement les points  $M$  et  $H$  ainsi que  $x, y, z, \rho$  et  $\varphi$ .
- 2) Donner les relations entre  $(x, y, z)$  et  $(\rho, \varphi, z)$  et *vice versa*.
- 3) Exprimer les vecteurs de la base cylindrique  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$  en fonction des vecteurs de la base cartésienne  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .
- 4) Donner les composantes du vecteur  $\vec{OM}$  dans la base locale  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ . Que devient cette base locale lorsqu'on fait varier  $z$  en maintenant  $\rho$  et  $\varphi$  constants ? Même question quand on fait varier  $\rho$  en maintenant  $\varphi$  et  $z$  constants, et enfin quand on fait varier  $\varphi$  en maintenant  $\rho$  et  $z$  constants.
- 5) Soient  $A$  et  $B$  deux points de l'espace de coordonnées cartésiennes respectives  $(1, 1, 1)$  et  $(-1, 1, 1)$ . Faire un schéma avec les points  $A, B$  et les bases cylindriques associées à chacun de ces deux points. Donner les composantes cylindriques des vecteurs  $\vec{OA}$  et  $\vec{OB}$ . Conclure.

## 5.2 Repérage sphérique

On considère le repère cartésien  $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  dans lequel un point  $M$  est repéré par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ . On note  $H$  la projection orthogonale du point  $M$  sur le plan  $(Oxy)$ . Le point  $M$  peut être repéré par le triplet sphérique  $(r, \theta, \varphi)$  défini par :

$$r = OM \quad , \quad \theta = \left( \vec{e}_z, \vec{OM} \right) \quad , \quad \varphi = \left( \vec{e}_x, \vec{OH} \right)$$

L'angle  $\theta$  est orienté et varie entre 0 et  $\pi$ . L'angle  $\varphi$  est aussi orienté et il varie entre 0 et  $2\pi$ .

On appelle **base sphérique** la base orthonormée directe  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  dans laquelle :

- $\vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{||\vec{OM}||}$
- $\vec{e}_\varphi$  est identique au vecteur  $\vec{e}_\varphi$  de la base cylindrique
- $\vec{e}_\theta$  est tel que  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  soit une base orthonormée directe

En conséquence,  $(\vec{e}_z, \vec{e}_\theta) = \theta + \pi/2$ . La base sphérique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  est une base **locale** car elle dépend du point  $M$  considéré. Le repère sphérique associé au point  $M$  est  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ .

On a alors

$$\boxed{\vec{OM} = r \vec{e}_r} \quad (21)$$

Le déplacement élémentaire de  $M(\rho, \theta, \varphi)$  au point infiniment proche  $M'(\rho + d\rho, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$  avec  $d\rho, d\theta, d\varphi$  les variations infinitésimales algébriques est

$$\overrightarrow{d\ell} = \overrightarrow{MM'} = d\rho \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi \quad (22)$$

En effet la distance de l'arc de cercle infinitésimal de rayon  $r$  et d'angle  $d\theta$  est bien  $rd\theta$  et celui dans le plan  $(xOy)$  a bien un rayon projeté  $r \sin \theta$  et un angle  $d\varphi$  et a une distance égale à  $r \sin \theta d\varphi$ .

Le volume élémentaire de la calotte sphérique de grande diagonale  $||\overrightarrow{MM'}||$  est alors

$$d^3V = d\ell_r d\ell_\theta d\ell_\varphi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (23)$$

### 5.2.1 Relations entre repérages cartésien, cylindrique et sphérique

- 1) Représenter sur un schéma les deux bases  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  et  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  en faisant apparaître clairement les points  $M$  et  $H$  ainsi que  $r, \theta$  et  $\varphi$ .
- 2) Donner les relations entre  $(\rho, \varphi, z)$  et  $(r, \theta, \varphi)$ .
- 3) Donner les relations entre  $(x, y, z)$  et  $(r, \theta, \varphi)$  et vice-versa.
- 4) Donner les composantes du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  dans la base locale  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ . Que devient cette base locale lorsque le point  $M$  se déplace ?
- 5) Application numérique : Faire un schéma avec le point  $A$  et la base sphérique associée à  $A$ . Calculer le triplet sphérique  $(r, \theta, \varphi)$  associé au point  $A$ , défini dans l'exercice **5.1.2**, et en déduire les composantes de  $\overrightarrow{OA}$  dans la base sphérique associée à  $A$ . Mêmes questions pour le vecteur  $\overrightarrow{OB}$  dans la base sphérique associée à  $B$ . Conclure.

## 5.3 Changement de base

- 1) Soit le point  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$  dans le repère cartésien. Il est repéré par le triplet cylindrique  $(\rho, \varphi, z)$  et par le triplet sphérique  $(r, \theta, \varphi)$ . Faire un schéma dans lequel sont représentés les vecteurs unitaires de ces trois bases.
- 2) Faire un schéma dans le plan  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_z)$  et y positionner  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$ . Faire un schéma dans le plan  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  et y positionner  $\vec{e}_\rho$  et  $\vec{e}_\varphi$ .
- 3) En utilisant ces schémas, exprimer les vecteurs de la base sphérique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  en fonction des vecteurs de la base cylindrique  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ .
- 4) En déduire en utilisant les résultats de la question 3 de l'exercice **5.1.2**, les expressions des vecteurs de la base sphérique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  en fonction des vecteurs de la base cartésienne  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

## 5.4 Calcul de volumes

À l'aide des formules (16), (20) et (16), calculer les volumes des corps suivants :

- 1) une pyramide à base carrée de côté  $a$  et de hauteur  $h$ . Rép :  $V = \frac{a^2 h}{3}$ .
- 2) cylindre de hauteur  $h$  et de rayon  $R$ . Rép :  $V = \pi R^2 h$ .
- 3) sphère de rayon  $R$ . Rép :  $V = \frac{4\pi}{3} R^3$ .
- 4) cône de rayon maximal  $R$  et d'angle  $\Theta$ . Rép :  $V = \frac{2\pi}{3} R^3 \tan \Theta$ .
- 5) calotte sphérique de hauteur  $h$  et d'angle  $\Theta$ . Rép :  $V = \frac{\pi}{3} h^3 \frac{2 - \cos \Theta - \cos^3 \Theta}{(1 - \cos \Theta)^3}$ .

# Chapitre 6 : Nombres complexes et signaux sinusoïdaux

Les nombres complexes sont utilisés dans de nombreux domaines de la physique. Le but de ce chapitre est de vous familiariser aux manipulations algébriques des nombres complexes et d'introduire une utilisation utile notamment en électrocinétique.

## 6.1 Nombres complexes, plan complexe

Dans le chapitre 3, on a abondamment utilisé l'addition de deux vecteurs et la multiplication d'un scalaire réel par un vecteur. Par exemple, pour deux vecteurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  du plan, muni du repère cartésien  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ , et pour un scalaire  $k \in \mathbb{R}$ , on a :

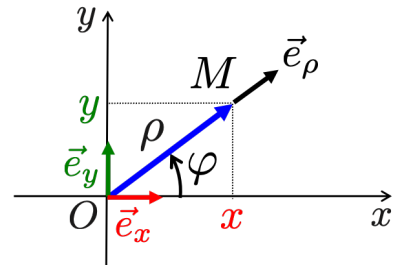
$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}, \quad k \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix}$$

Le plan  $(Oxy)$  est aussi parfois noté  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ . Dans le chapitre 3, on a manipulé des vecteurs 2D (mais aussi 3D) et non des couples de nombres réels. Si on transpose ce qui est écrit plus haut pour la somme de 2 vecteurs ou la multiplication d'un vecteur par un scalaire réel à des éléments de  $\mathbb{R}^2$ , on écrirait :

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad , \quad k(x_1, y_1) = (kx_1, ky_1)$$

L'objectif de ce chapitre est de maîtriser des manipulations non pas sur  $\mathbb{R}^2$  mais sur  $\mathbb{C}$ , ensemble des **nombres complexes**. Fondamentalement, la manipulation algébrique de nombres complexes peut souvent se transposer à des manipulations sur des couples de réels ou sur des vecteurs 2D.

On a vu dans l'exercice **5.1.1** du chapitre 4 les relations entre les coordonnées  $(x, y)$  dans un repérage cartésien et  $(\rho, \varphi)$  dans un repérage polaire. Un point  $M$  du plan est repéré soit par ses coordonnées  $(x, y)$  ou  $(\rho, \varphi)$ , soit par les composantes du vecteur  $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = \rho\vec{e}_\rho$ .



On peut construire  $\mathbb{C}$  en utilisant les coordonnées cartésiennes d'un point du plan et en écrivant :

$$\mathbb{C} = \{x + iy / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

où  $i$  est un nombre complexe tel que  $i^2 = -1$ . On peut aussi rencontrer la notation  $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ . On appelle  $i\mathbb{R}$  l'ensemble des imaginaires purs. Dans cette notation,  $\mathbb{R}$  correspond à l'axe des  $x$  et  $i\mathbb{R}$  à l'axe des  $y$ .

On peut de façon équivalente définir  $\mathbb{C}$  en utilisant les coordonnées polaires d'un point du plan :

$$\mathbb{C} = \{\rho e^{i\varphi} / \rho \in \mathbb{R}^+, \varphi \in \mathbb{R}\}$$

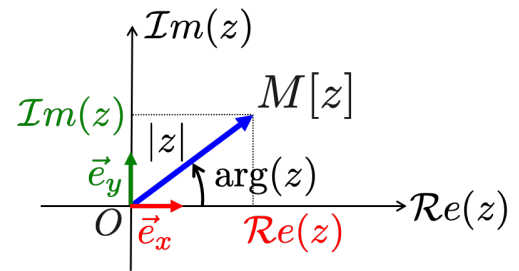
On a ici introduit l'**exponentielle d'un nombre complexe imaginaire pur** défini par (la justification fait l'objet d'un exercice) :

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Dans ce chapitre, au lieu de travailler avec un couple de **2 nombres réels**,  $(x, y)$  ou  $(\rho, \varphi)$ , on va manipuler **1 seul nombre complexe**, traditionnellement noté  $z$  (attention à ne pas confondre avec la troisième coordonnée cartésienne  $z$  qui n'intervient pas ici) et relié à  $(x, y)$  ou  $(\rho, \varphi)$  par  $z = x + iy = \rho e^{i\varphi}$ . On définit les termes suivants :

- $x$  est la **partie réelle** de  $z$  et on note  $\mathcal{Re}(z) = x$  ;
- $y$  est la **partie imaginaire** de  $z$  et on note  $\mathcal{Im}(z) = y$  ;
- $\rho$  est le **module** de  $z$  et on note  $|z| = \rho$  ;
- $\varphi$  est l'**argument** de  $z$  et on note  $\arg(z) = \varphi$ .

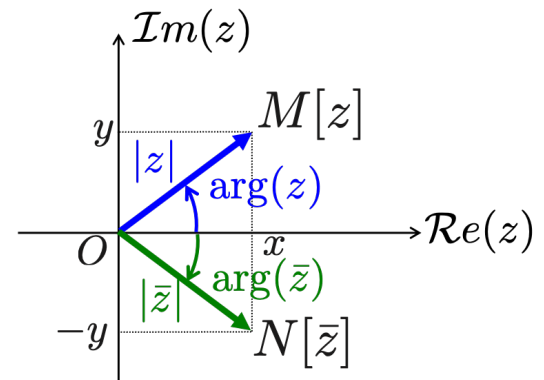
Ces définitions se retrouvent en comparant le schéma ci-contre, à comparer à la figure de la page précédente.



Au lieu de parler du plan  $(Oxy)$  ou du plan  $\mathbb{R}^2$ , on parlera plutôt du plan complexe  $\mathbb{C}$  dont l'axe horizontal est l'axe des parties réelles et l'axe vertical celui des parties imaginaires. On dit qu'un point  $M$  de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  ou polaires  $(\rho, \varphi)$  a pour **affixe** le nombre complexe  $z = x + iy = \rho e^{i\varphi}$ . Dans le plan complexe, on note " $M[z]$ ". L'affixe de  $O$ , origine du repère cartésien, est le nombre complexe 0.

De la même manière qu'on peut définir les composantes cartésiennes du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  comme  $(x_B - x_A, y_B - y_A)$  à partir de  $(x_A, y_A)$  et de  $(x_B, y_B)$ , coordonnées cartésiennes respectivement du point  $A$  et du point  $B$ , on peut définir l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  comme  $z_B - z_A$  si  $z_A$  et  $z_B$  sont respectivement les affixes des points  $A$  et  $B$ . Comme l'affixe de  $O$  est 0, on a alors le fait que  $z$ , affixe du point  $M$ , est aussi l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{OM}$ .

On définit enfin l'opération de conjugaison d'un nombre complexe. Si  $z = x + iy$  alors le **complexe conjugué** de  $z$ , noté  $\bar{z}$  (ou parfois  $z^*$ ), est défini par  $\bar{z} = x - iy$ . Si  $z$  est l'affixe d'un point  $M$  du plan complexe, alors  $\bar{z}$  est l'affixe du point  $N$ , symétrique de  $M$  par rapport à l'axe des abscisses (cf. figure ci-contre).



Le tableau ci-dessous résume les notions et les propriétés à connaître sur les nombres complexes. La démonstration de certaines propriétés se fera au cours des exercices de ce chapitre.

|                                                                                                                                                                |                                            |                                                                                                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Forme algébrique                                                                                                                                               | $z = x + iy$                               | $x = \mathcal{Re}(z)$ , partie réelle de $z$<br>$y = \mathcal{Im}(z)$ , partie imaginaire de $z$                 |
| Forme exponentielle                                                                                                                                            | $z =  z e^{i\arg(z)}$                      | $ z  = OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$ , module de $z$<br>$\arg(z) = \varphi$ rad, argument de $z$ (à $2\pi$ près) |
| Forme trigonométrique                                                                                                                                          | $z =  z [\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z))]$ | $\cos(\arg(z)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$<br>$\sin(\arg(z)) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$                     |
| Complexe conjugué de $z$ : $\bar{z} = x - iy =  z e^{-i\arg(z)} =  z [\cos(\arg(z)) - i \sin(\arg(z))]$<br>Module de $z$ : $ z  =  \bar{z}  = \sqrt{z\bar{z}}$ |                                            |                                                                                                                  |

Remarques :

- En électrocinétique, pour ne pas confondre le nombre imaginaire  $i$  (tel que  $i^2 = -1$ ) avec l'intensité dans un circuit électrique, ce nombre imaginaire est souvent noté  $j$  au lieu de  $i$ . Cependant, dans cette UE, nous garderons la notation standard  $i$ .
- Si  $x \neq 0$ , on a  $\tan(\arg(z)) = y/x$ , ce qui permet de déterminer  $\arg(z)$  mais **à  $\pi$  près**, par exemple avec  $\arg(z) \in ]-\pi/2; \pi/2[$ . Pour déterminer  $\arg(z)$  à  $2\pi$  près, la connaissance de  $\tan(\arg(z))$  ne suffit pas, il

faut connaître en plus  $\sin(\arg(z))$  ou  $\cos(\arg(z))$ . Autrement dit, pour déterminer  $\arg(z)$  à  $2\pi$  près, on doit connaître son sinus et son cosinus, ou son sinus et sa tangente, ou encore son cosinus et sa tangente.

- En électrocinétique, bien souvent, la partie réelle des nombres complexes qui interviennent est strictement positive. Si  $z$  est un nombre complexe dans le problème, on a donc souvent

$$\operatorname{Re}(z) > 0 \Rightarrow \cos(\arg(z)) > 0 \Rightarrow \arg(z) \in ]-\pi/2; \pi/2[$$

Alors on peut déterminer de façon unique  $\arg(z)$  en utilisant  $\tan(\arg(z)) = y/x$  puisqu'on sait que  $\arg(z)$  est dans un intervalle de longueur  $\pi$ .

### 6.1.1 Propriétés générales sur les nombres complexes

Dans cet exercice, nous allons démontrer des propriétés générales sur les nombres complexes, en partant aussi bien de la forme algébrique, exponentielle ou trigonométrique d'un nombre complexe.

- 1) Soit  $z$  un nombre complexe. En utilisant la forme algébrique de  $z$ , démontrer les égalités suivantes :  $\overline{\overline{z}} = z$ ,  $|z| = |-z| = |\overline{z}|$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad |\alpha z| = |\alpha| \times |z|$ ,  $z\overline{z} = |z|^2$ . Montrer que  $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ .
- 2) Soient  $z_1$  et  $z_2$  deux nombres complexes quelconques. En utilisant la forme algébrique de  $z_1$  et  $z_2$ , déterminer la forme algébrique de  $z_1 + z_2$ ,  $z_1 z_2$  et  $z_1/z_2$ . Démontrer les égalités suivantes :  $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ ,  $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$ ,  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ ,  $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ .
- 3) Soit  $z$  un nombre complexe. En utilisant la forme algébrique de  $z$ , démontrer que  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$  et  $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$ . En déduire que  $\overline{\overline{z}} = z \iff z \in \mathbb{R}$  et  $\overline{z} = -z \iff z \in i\mathbb{R}$ .
- 4) Soit  $z$  un nombre complexe de module 1. Pourquoi peut-on l'écrire  $z = \exp[i \arg(z)]$ ? En utilisant la forme trigonométrique d'un nombre complexe, expliquer pourquoi on a  $z = \exp[i(\arg(z) + 2\pi)]$  et que l'on peut donc se contenter de donner l'argument d'un nombre complexe dans l'intervalle  $[0, 2\pi[$  ou dans l'intervalle  $] - \pi, \pi]$ .  
Pour chacun des arguments suivants, déterminer le nombre complexe de module 1 correspondant :  $0, \pi/2, \pi, -\pi/2$ .
- 5) Soit  $\varphi \in \mathbb{R}$ . En utilisant la forme trigonométrique d'un nombre complexe, démontrer que  $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$  et  $\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$ .  
Démontrer que  $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}$ . En déduire que pour  $z$  un nombre complexe non nul quelconque,  $\arg(\overline{z}) = \arg(1/z) = -\arg(z)$ .
- 6) Soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  deux nombres réels quelconques. En utilisant la forme trigonométrique de  $e^{i\varphi_1}$  et  $e^{i\varphi_2}$ , calculer  $e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2}$  et comparer le résultat à la forme trigonométrique de  $e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$  (on utilisera le fait que  $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$  et  $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ ). En déduire que  $e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ ,  $\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$ . Démontrer que pour  $z_1$  et  $z_2$  deux nombres complexes non nuls quelconques, on a à  $2\pi$  près,  $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ .

### 6.1.2 Manipulations algébriques de nombres complexes

On considère les nombres complexes définis par  $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ,  $z_2 = 1 + i$ ,  $z_3 = z_1/z_2$  et  $z_4 = z_1 + z_2$ .

- 1) Déterminer la forme algébrique de  $z_3$  et de  $z_4$ .
- 2) Mettre  $z_1$  et  $z_2$  sous forme exponentielle. En déduire les formes exponentielle et trigonométrique de  $z_3$ .
- 3) En comparant les résultats des questions précédentes, en déduire les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et de  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .
- 4) Placer les points  $M_1, M_2, M_3$  et  $M_4$  d'affixe respectif  $z_1, z_2, z_3$  et  $z_4$  dans le plan  $(Oxy)$ .
- 5) Sans faire le calcul explicite, comment peut-on déduire graphiquement  $|z_1 + z_2|$  et  $\arg(z_1 + z_2)$ ?

### 6.1.3 Rotation et nombre complexe

Dans l'exercice 4.5.2 du chapitre 3, vous avez déterminé les relations entre les composantes cartésiennes  $(x, y)$  d'un vecteur  $\overrightarrow{OM}$  dans la base cartésienne  $\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  aux composantes  $(x', y', z)$  de ce même vecteur mais exprimées dans la base  $\mathcal{B}' = (\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_z)$ , cette base étant obtenue à partir de  $\mathcal{B}$  par une rotation d'un angle  $\alpha$  autour de l'axe  $Oz$ . On va ici oublier la composante  $z$  et ne travailler que dans le plan  $(Oxy)$ .

Considérons ici  $\overrightarrow{OM'}$ , vecteur obtenu à partir du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  par une rotation d'angle  $\alpha$  et de centre  $O$ .

- 1) On note  $z$  et  $z'$  respectivement l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  et celui du vecteur  $\overrightarrow{OM'}$ . En utilisant les résultats de la question 4 de l'exercice 4.5.2, démontrer qu'on a  $z' = e^{i\alpha}z$ .
- 2) Application : soit  $M$  le point de coordonnées cartésiennes  $(1, 1)$ . Déterminer les formes algébrique et exponentielle de  $z$ , affixe du vecteur  $\overrightarrow{OM}$ . On considère la rotation d'angle  $\pi/2$  et de centre  $O$ . Déterminer les formes algébrique et exponentielle de  $z'$ , affixe du vecteur  $\overrightarrow{OM'}$  obtenu à partir de  $\overrightarrow{OM}$  par cette rotation. En déduire les coordonnées cartésiennes et polaires du point  $M'$ .

### 6.1.4 Linéarisation de puissances de fonctions trigonométriques

Le but de cet exercice est d'utiliser les exponentielles complexes pour linéariser  $\sin^2 \varphi$  et  $\sin^4 \varphi$ , c'est-à-dire pour les exprimer comme des combinaisons linéaires de  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$ ,  $\sin(2\varphi)$ ,  $\cos(2\varphi)$ , etc. Pour cela, on rappelle la formule du binôme de Newton :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} \quad \text{avec} \quad C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- 1) Exprimer explicitement la formule du binôme de Newton pour  $n = 2$  avec  $a$  et  $b$  deux nombres complexes quelconques. Exploiter le résultat obtenu pour linéariser  $\sin^2 \varphi$  en utilisant  $\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$ . On rappelle aussi que  $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$ .  
Vérifier la validité de la relation obtenue pour  $\varphi = \pi/4$  et  $\varphi = \pi/2$ .
- 2) Exprimer explicitement la formule du binôme de Newton pour  $n = 4$  avec  $a$  et  $b$  deux nombres complexes quelconques. Exploiter le résultat obtenu pour linéariser  $\sin^4 \varphi$ . Vérifier la validité de la relation obtenue pour  $\varphi = \pi/4$  et  $\varphi = \pi/2$ .
- 3) Pour illustrer l'utilité de linéariser la puissance d'une fonction trigonométrique, on va calculer la valeur moyenne de la fonction  $t \mapsto \sin^2(\omega t)$  sur une période  $T = 2\pi/\omega$  où  $\omega$  un réel strictement positif. Il existe plusieurs notations pour la valeur moyenne d'une fonction  $f$ , comme  $\overline{f(t)}$ . Cependant, cette notation n'est pas la plus judicieuse ici, à cause de l'ambiguïté avec le complexe conjugué. Nous noterons donc la valeur moyenne de  $f$  sur une période de  $T$  par  $\langle f(t) \rangle_T$ . Celle-ci vaut par définition :

$$\langle f(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

- 1) Calculer la valeur moyenne  $\langle \sin^2(\omega t) \rangle_T$ .
- 2) Pourquoi  $\langle \cos^2(\omega t) \rangle_T$  donne-t-il le même résultat ?



## 6.2 Signaux sinusoïdaux et représentation complexe

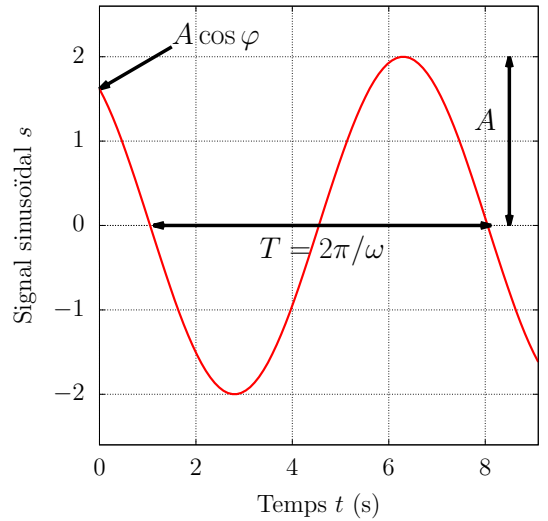
### Forme générique d'un signal sinusoïdal réel

Soit  $s$  une grandeur physique (tension ou intensité électrique, position d'une masse accrochée à un ressort, etc.) dont la dépendance temporelle est sinusoïdale. À un instant  $t$  donné, on l'écrit sous la forme :

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

avec  $A > 0$  est l'**amplitude**,  $\omega > 0$  la **pulsation** et  $\varphi \in \mathbb{R}$  la **phase à l'origine** du signal sinusoïdal. La connaissance de ces trois constantes caractérisent complètement  $s(t)$ . L'angle  $\omega t + \varphi$  est appelé «phase de  $s$  à l'instant  $t$ ».

La figure ci-contre montre un exemple de signal sinusoïdal tel qu'on peut le voir sur l'écran d'un oscilloscope, avec sur l'axe des abscisses le temps  $t$  et sur l'axe des ordonnées  $s$ . On y a indiqué comment on peut lire graphiquement  $A$ ,  $T = 2\pi/\omega$  et  $A \cos \varphi$ .

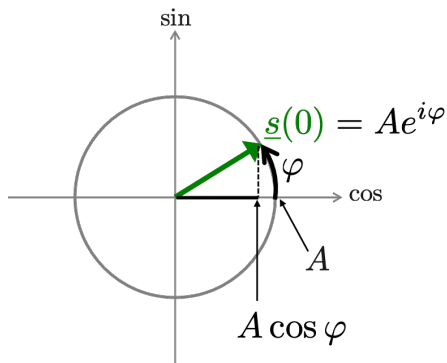


$s(t)$  est ici un nombre réel car il correspond à une grandeur physique réelle, mesurable avec un appareil de mesure. À cette grandeur réelle, on associe le **signal complexe**  $\underline{s}(t)$  obtenu en remplaçant  $\cos(\omega t + \varphi)$  par  $\exp[i(\omega t + \varphi)]$  :

$$\underline{s}(t) = A e^{i(\omega t + \varphi)} \quad , \quad s(t) = \text{Re}[\underline{s}(t)] = A \cos(\omega t + \varphi) \quad .$$

### Représentation de Fresnel d'un signal sinusoïdal

$\underline{s}(t)$  peut être vu comme l'affixe d'un vecteur dans le plan complexe : c'est la représentation de Fresnel d'un signal sinusoïdal.



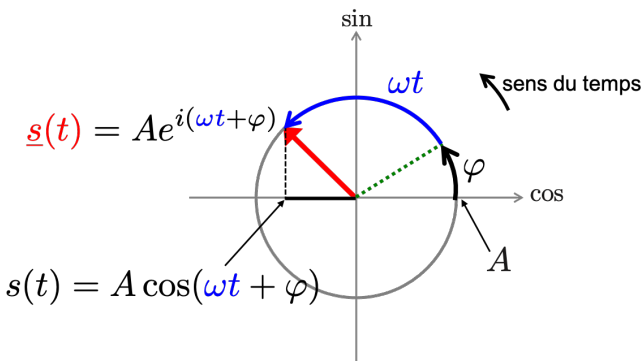
Dans la figure de gauche en haut, on a représenté le vecteur d'affixe  $\underline{s}(0)$  (flèche verte). Le module de  $\underline{s}(0)$  vaut l'amplitude  $A$  et l'angle que fait le vecteur vert avec l'axe des abscisses est la phase à l'origine  $\varphi$ . La projection du vecteur vert sur l'axe des abscisses donne  $A \cos \varphi$ .

Dans la figure en bas, le vecteur d'affixe  $\underline{s}(t)$  (flèche rouge) est obtenu à partir du vecteur d'affixe  $\underline{s}(0)$  par une rotation de centre  $O$  et d'angle  $\omega t$ . En effet, comme  $e^{a+b} = e^a e^b \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$ , on a :

$$\underline{s}(t) = A e^{i(\omega t + \varphi)} = A e^{i\varphi} e^{i\omega t} = \underline{s}(0) e^{i\omega t}$$

Et l'on a vu dans l'exercice 1.3 que multiplier un nombre complexe par  $e^{i\alpha}$  correspond à une rotation de centre  $O$  et d'angle  $\alpha$ . Ainsi, quand  $t$  augmente, l'extrémité du vecteur d'affixe  $\underline{s}(t)$  décrit le cercle de centre  $O$  et de rayon  $A$ .

La projection de la flèche rouge sur l'axe des abscisses donne  $A \cos(\omega t + \varphi)$  qui est précisément le signal réel  $s(t)$ .



Dans l'écriture  $\underline{s}(t) = \underline{s}(0) e^{i\omega t}$ , on voit que la dépendance temporelle, à savoir  $e^{i\omega t}$ , s'est factorisée. Ainsi, pour connaître  $\underline{s}(t)$ , il suffit de connaître  $\underline{s}(0)$  et de multiplier ce dernier par  $e^{i\omega t}$ .

Pour alléger les notations, on note souvent le nombre complexe  $\underline{s}(0)$  simplement  $\underline{A}$ , qu'on appelle naturellement **amplitude complexe** du signal complexe  $\underline{s}(t)$  :

$$\underline{s}(t) = \underline{A} e^{i\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{A} = A e^{i\varphi}$$

$\underline{A}$  est ici écrite sous sa forme exponentielle pour  $\underline{A}$  avec :

$$\text{l'amplitude } A = |\underline{A}| \quad \text{et la phase à l'origine } \varphi = \arg(\underline{A}) \quad .$$

Comme la partie réelle d'une somme de nombres complexes est la somme des parties réelles, si on additionne plusieurs signaux sinusoïdaux, on additionne également leurs représentations complexes :

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + \dots \iff \underline{s}(t) = \underline{s}_1(t) + \underline{s}_2(t) + \underline{s}_3(t) + \dots$$

### Intérêt de la représentation complexe de signaux sinusoïdaux

L'utilité de passer en grandeurs complexes concerne par exemple l'aspect temporel. En effet, si tous les signaux sinusoïdaux dans un problème donné ont la même pulsation  $\omega$ , on introduit les signaux complexes de façon à factoriser la partie temporelle, qui s'écrira toujours  $e^{i\omega t}$ , on manipule des amplitudes complexes, c'est-à-dire juste des nombres, on réinjecte la dépendance temporelle en multipliant par  $e^{i\omega t}$  et l'on revient enfin aux grandeurs réelles (puisque ce sont elles que l'on mesure) en prenant la partie réelle à la fin du calcul. Des exemples concrets seront vus dans les exercices ci-dessous mais aussi dans la résolution d'équations différentielles (chapitre 6).

#### 6.2.1 Représentation complexe de signaux sinusoïdaux

On considère les grandeurs sinusoïdales suivantes, de même pulsation  $\omega$  :

$$s_1(t) = 2\sqrt{3} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right), \quad s_2(t) = -2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right), \quad s_3(t) = -\frac{5}{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right), \quad s_4(t) = \cos(\omega t) + \sqrt{3} \sin(\omega t).$$

- 1) Pour  $i = 1, \dots, 4$ , mettre ces expressions sous la forme  $s_i(t) = A_i \cos(\omega t + \varphi_i)$  pour en déduire les amplitudes (réelles et positives)  $A_i$  et les phases à l'origine  $\varphi_i$  de chacun des signaux ci-dessus.  
*Indication* : pour  $s_1(t)$  à  $s_3(t)$ , transformer les expressions en cosinus en utilisant les propriétés des fonctions cos et sin vues dans le chapitre 3; pour  $s_4(t)$ , développer  $A_4 \cos(\omega t + \varphi_4)$  avec la formule  $\cos(a+b)$  et identifier terme à terme les deux expressions de  $s_4(t)$ .
- 2) En déduire l'expression des amplitudes complexes  $\underline{A}_i$  des signaux complexes  $\underline{s}_i(t)$ .

#### 6.2.2 Combinaison linéaire de signaux sinusoïdaux

Soient les 2 signaux périodiques  $s_1$  et  $s_2$ , de même pulsation  $\omega$ , tels que :

$$s_1(t) = -\frac{3}{2} \cos\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right) \quad \text{et} \quad s_2(t) = -2 \sin\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right)$$

- 1) Après avoir écrit les signaux  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  sous la forme  $s_i(t) = A_i \cos(\omega t + \varphi_i)$ , exprimer, sous forme trigonométrique puis exponentielle, les grandeurs complexes  $\underline{s}_1(t)$ ,  $\underline{s}_2(t)$ , associées à  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$ .
- 2) En déduire les amplitudes complexes  $\underline{A}_1$  et  $\underline{A}_2$  de  $\underline{s}_1(t)$  et  $\underline{s}_2(t)$ .
- 3) Montrer que pour obtenir l'amplitude complexe  $\underline{A}$  associée à  $\underline{s}(t) = \underline{s}_1(t) - \underline{s}_2(t)$ , il suffit de soustraire les amplitudes complexes et qu'on a donc  $\underline{A} = \underline{A}_1 - \underline{A}_2$ . Représenter  $\underline{A}_1$ ,  $\underline{A}_2$  et  $\underline{A}$  dans le plan complexe.
- 4) Calculer  $\underline{A}$  en privilégiant la forme, algébrique ou exponentielle, la plus adaptée pour réaliser une addition.
- 5) Calculer l'amplitude  $|\underline{A}|$  et l'argument  $\arg(\underline{A})$  de  $\underline{A}$ . Expliquez pourquoi, dans ce cas particulier, la valeur de  $|\underline{A}|$  aurait pu se calculer plus simplement (à partir du graphique).
- 6) En déduire la forme exponentielle de  $\underline{s}(t)$ , puis  $s(t)$ , la grandeur sinusoïdale (réelle) associée à  $\underline{s}(t)$ .

### 6.2.3 Tension triphasée

Le principe d'une tension (ou d'un courant) triphasée est le suivant : au lieu de n'utiliser qu'une seule tension électrique sinusoïdale d'amplitude  $U\sqrt{2}$ <sup>4</sup> et de pulsation  $\omega$ , on considère la somme de trois tensions sinusoïdaux de mêmes amplitude et pulsation mais déphasés deux à deux de  $2\pi/3$ . Soient donc  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  trois tensions associées à une tension triphasée de pulsation  $\omega$  et de même amplitude  $U\sqrt{2}$  :

$$u_1(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t) \quad , \quad u_2(t) = U\sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \quad , \quad u_3(t) = U\sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right) \quad .$$

Le but de cet exercice est de manipuler d'une part des relations trigonométriques et d'autre part la représentation complexe de signaux sinusoïdaux pour montrer l'intérêt du courant triphasé. Pour cela, on considère  $u_{\text{tot}}(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$  et  $u_{12}(t) = u_1(t) - u_2(t)$ .

- 1) En utilisant l'une des formules trigonométriques de base, simplifier l'expression de  $u_{\text{tot}}(t)$ .
- 2) Pour  $i = 1, 2, 3$ , associer à  $u_i(t)$  la grandeur complexe  $\underline{u}_i(t) = \underline{U}_i e^{i\omega t}$  et donner l'expression de  $\underline{U}_i$  en fonction de  $U$  et  $\pi$ .
- 3) Soit  $\underline{u}_{\text{tot}}(t)$  la grandeur complexe associée à  $u_{\text{tot}}(t)$ . Montrer que l'amplitude complexe  $\underline{U}_{\text{tot}}$  de  $\underline{u}_{\text{tot}}(t)$  est égale à  $\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3$ . En déduire l'expression de  $\underline{U}_{\text{tot}}$  en fonction de  $U$  et  $\pi$ .

En utilisant la relation classique donnant la somme des  $n+1$  premiers termes d'une suite géométrique de raison  $q \neq 1$  :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

en déduire la valeur de  $\underline{U}_{\text{tot}}$  en prenant  $q = e^{2i\pi/3}$  et  $n = 2$ . Comparer au résultat de la question 1).

- 4) Représenter dans le plan complexe les 3 vecteurs dont les affixes sont les  $\underline{U}_i$ . Construire graphiquement la somme de ces 3 vecteurs. En déduire la valeur de  $\underline{U}_{\text{tot}}$ . Comparer au résultat de la question 1).
- 5) Soit  $\underline{u}_{12}(t) = \underline{U}_{12} e^{i\omega t}$  la grandeur complexe associée à  $u_{12}(t) = u_1(t) - u_2(t)$ . Donner la relation entre  $\underline{U}_{12}$ ,  $\underline{U}_1$  et  $\underline{U}_2$ , puis entre  $\underline{U}_{12}$ ,  $U$  et  $\pi$ . Construire graphiquement  $\underline{U}_{12}$  et comparer  $|\underline{U}_{12}|$  à  $U$ . Montrer graphiquement que  $\arg(\underline{U}_{12}) = -\pi/6$ .
- 6) En utilisant le fait que  $1 - e^{2i\pi/3} = e^{i\pi/3}(e^{-i\pi/3} - e^{i\pi/3})$  et que  $e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i \sin \varphi$ , montrer que  $\underline{u}_{12}(t) = U\sqrt{3}\sqrt{2}e^{-i\pi/6}e^{i\omega t}$ . En déduire l'expression de la tension  $u_{12}(t)$  et comparer son amplitude à celle des tensions de départ  $u_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Conclure. En prenant  $U = 220$  V et  $\sqrt{3} \simeq 1,73$ , montrer que la tension  $u_{12}(t)$  a une amplitude (divisée par  $\sqrt{2}$ ) égale à  $\simeq 380$  V.

### 6.2.4 Dérivée et intégration d'un signal sinusoïdal en représentation complexe

Soit  $s$  un signal sinusoïdal d'amplitude  $A$ , de pulsation  $\omega$  et de phase à l'origine  $\varphi$ . On note  $\underline{s}(t)$  le signal complexe associé.

- 1) Rappeler comment s'écrivent  $s(t)$  et  $\underline{s}(t)$ . On introduira  $\underline{A}$ , amplitude complexe de  $\underline{s}(t)$ .
- 2) Calculer  $\frac{ds}{dt}(t)$  et en déterminer l'amplitude complexe, qu'on notera  $\underline{B}$ . Quel est le lien entre  $\arg(\underline{B})$  et  $\arg(\underline{A})$ ? Comment obtient-on dans le plan complexe le vecteur d'affixe  $\underline{B}$  à partir du vecteur d'affixe  $\underline{A}$ ?
- 3) Calculer une primitive de  $\underline{s}(t)$ . On considère dans la suite la primitive qui est aussi un signal complexe de pulsation  $\omega$ . On note  $\underline{C}$  son amplitude complexe. Quel est le lien entre  $\arg(\underline{C})$  et  $\arg(\underline{A})$ ? Comment obtient-on dans le plan complexe le vecteur d'affixe  $\underline{C}$  à partir du vecteur d'affixe  $\underline{A}$ ?

---

4. Le facteur  $\sqrt{2}$  est lié à la définition d'une tension efficace. Cette notion sera vue plus tard en électrocinétique.

# Chapitre 7 : Différentielle, formes différentielles et fonctions de plusieurs variables

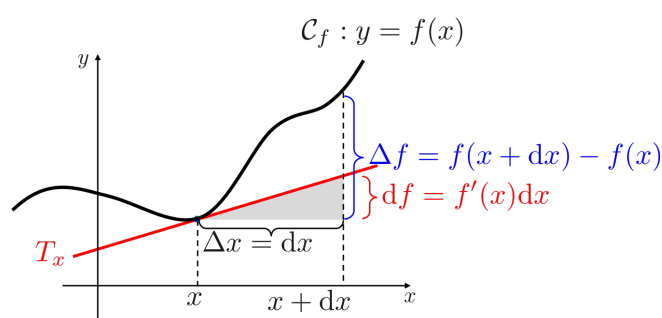
Ce dernier chapitre a pour objectif d'introduire la notion de différentielle telle qu'elle est utile en physique pour traiter des fonctions à une ou plusieurs variables. Mathématiquement, la notion est plus complexe et ne sera abordée rigoureusement qu'en deuxième année dans le cours Math2-Ana3, en lien avec la notion de forme différentielle. Nous allons cependant voir les résultats principaux de cette théorie, qui permet d'appréhender concrètement les notions de dérivée et d'intégrale en physique, en donnant du sens aux notations  $\frac{df}{dx}$  et  $\int f(x)dx$ .

Du point de vue du physicien la différentielle  $df$  d'une fonction  $f$  s'interprète comme la variation de la fonction autour d'un point, quand la ou les variables dont la fonction dépend varient. Ainsi  $dx$  correspond à la variation de la variable  $x$ . On retiendra que la dimension physique de la différentielle  $df$  est identique à celle de la fonction  $f$ . Ainsi  $dt$  a la dimension d'un temps,  $dx$  d'une longueur,  $dV$  d'un volume, etc.

## Lien entre dérivée et différentielle

Soit  $C_f$  la courbe représentative d'une fonction  $f$  de la variable réelle  $x$ . On considère un point de  $C_f$  de coordonnées  $(x, f(x))$  et la tangente à  $C_f$  en ce point, notée  $T_x$ . On rappelle que  $T_x$  a pour pente  $f'(x)$ .

On considère une variation horizontale  $\Delta x = dx$ , selon l'axe des abscisses. Suivant qu'on soit sur  $T_x$  ou sur  $C_f$ , la variation verticale n'est pas la même. On note  $df$  la variation quand on se déplace sur  $T_x$ , et  $\Delta f$  celle quand on se déplace sur  $C_f$ .



Comme montré sur la figure ci-dessus, on a en général  $df \neq \Delta f$ . Plus précisément, les taux d'accroissement sont respectivement :

$$\frac{df}{dx} = f'(x) \text{ sur } T_x \quad \text{et} \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} \text{ sur } C_f .$$

La différence entre les deux diminue quand on prend la limite  $dx \rightarrow 0$ . On écrit :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx} + \varepsilon \quad \text{avec} \quad \lim_{dx \rightarrow 0} \varepsilon = 0 \quad , \quad \text{ou encore} \quad \Delta f = df + \varepsilon dx = (f'(x) + \varepsilon)dx .$$

En considérant maintenant une variation infinitésimale  $dx$ , on a  $\Delta f = df$  et on écrit :

$$df = f'(x)dx \quad . \quad (1)$$

Cette équation relie la **différentielle** de  $x$ ,  $dx$ , à la différentielle de  $f$ ,  $df$ . L'égalité (1) n'est vraie qu'"à la limite", quand  $\varepsilon$  devient négligeable devant  $df$ . Cette restriction est devenue implicite. L'équation (1) permet d'interpréter la différentielle  $df$  comme la variation de  $f$  lorsque  $x$  varie de  $dx$ . On retiendra également que, si dérivée et différentielle sont des notions reliées, **la différentielle d'une fonction n'est pas égale à sa dérivée**. Comme on le voit dans l'équation (1), le membre de gauche contient la différentielle de  $f$ . Il faut que dans le membre de droite, il y ait aussi une différentielle (ici, celle de  $x$ ). On peut comparer l'équation (1) avec l'opérateur de dérivation par rapport à  $x$ ,  $\frac{d}{dx}$  :

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) \quad .$$

On peut naïvement penser qu'on peut retrouver l'équation (1) en "passant"  $dx$  du membre de gauche vers le membre de droite. Même si mathématiquement cette manipulation n'est ni correcte ni rigoureuse, elle est couramment utilisée en physique et en chimie afin de faciliter les calculs.

## Lien entre intégrale et différentielle

Dans un chapitre précédent, nous avons défini l'intégrale à l'aide de la notion de primitive, avec

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où  $F$  est une primitive de la fonction  $f$ .

Cette définition peut se revisiter à l'aide de la différentielle et de la notation  $f(x) = \frac{dF}{dx}$  de la dérivée.

$$\int f(x)dx = \int \frac{dF}{dx}dx = \int dF$$

Cette simplification (abusive) de  $dx$  sous le signe intégral correspond en fait à un changement de variable tel que nous l'avons utilisé dans les chapitres précédents. L'intégrale sur  $x$  devient une intégrale sur  $F$  qui devient la variable d'intégration. Cela doit s'accompagner d'un changement dans les bornes d'intégrations de l'intégrale, en remplaçant par exemple les bornes  $a$  et  $b$  de l'intégrale (pour la variable  $x$ ) par les bornes correspondantes  $F(a)$  et  $F(b)$ . On retrouve alors bien le résultat

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{F(a)}^{F(b)} dF = F(b) - F(a)$$

Enfin, on peut revisiter l'interprétation géométrique de l'intégrale comme l'"aire sous la courbe" de  $f$  entre les points d'abscisse  $a$  et  $b$  : la différentielle  $dx$  s'interprète comme une variation infinitésimale de  $x$  entre les bornes  $a$  et  $b$ . Dans ce cas,  $dF = f(x)dx$ , correspond à l'aire d'un rectangle de largeur  $dx$  et de hauteur  $f(x)$  et l'intégrale  $\int_a^b f(x)dx$  qui représente l'aire sous la courbe est alors la somme de l'aire de tous les rectangles infiniment fins, mais aussi la somme de toutes les variations  $dF$  de la primitive  $F$  de  $f$ . On retiendra qu'une intégrale est en fait une somme continue de petites variations  $dF = f(x)dx$  entre deux bornes. D'ailleurs, le signe mathématique  $\int$  utilisé pour l'intégrale ressemble à un S (pour somme), de même que le symbole  $\Sigma$  utilisé pour une somme discrète est un S grec.

## Fonction de plusieurs variables et dérivées partielles

Soit  $f$  une fonction de 2 variables  $x$  et  $y$ . On appelle **dérivée partielle** de  $f$  par rapport à  $x$  la dérivée de  $f$  par rapport à  $x$  **en considérant  $y$  comme une constante**. On la note

$$\left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_y .$$

Cette dérivée partielle est aussi a priori une fonction des 2 variables  $x$  et  $y$ . Si  $f$  a plus que 2 variables  $x$  et  $y$ , il faut préciser en indices toutes les variables maintenues constantes lors de la dérivation par rapport à  $x$ . On peut rencontrer la notation  $\frac{\partial f}{\partial x}$  mais elle est ambiguë dans le sens où l'on ne sait pas combien  $f$  a de variables ni quelles sont les variables maintenues fixes lors de la dérivation par rapport à la variable  $x$ . Cependant, elle est souvent employée quand il n'y a pas d'ambiguïté. La notation  $\partial$  n'est pas une fioriture d'écriture. Elle a un sens mathématique bien précis, comme le  $d$  droit en a une autre (ici, cela désigne une différentielle).

De la même manière qu'on peut avoir la dérivée première, seconde, etc. d'une fonction d'une seule variable (sous réserve que la fonction qu'on dérive ait les bonnes propriétés de dérivabilité), on peut avoir des dérivées partielles multiples. Par exemple, pour  $f$  fonction des 2 variables  $x$  et  $y$ , on peut définir la dérivée partielle seconde suivante :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} ,$$

qui est la dérivée partielle de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  par rapport à  $y$ , à  $x$  constant. Il existe un théorème très important sur les dérivées partielles, le **théorème de Schwarz** : pour  $f$  fonction de plusieurs variables (dont  $x$  et  $y$ ) telles que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  soient continues en  $(x, y)$ , on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad .$$

Autrement dit, si l'on est dans les conditions d'application de ce théorème, l'ordre de dérivation n'a pas d'importance : on peut dériver d'abord par rapport à  $x$  en maintenant  $y$  constant, puis dériver par rapport à  $y$  en maintenant  $x$  constant, on obtient le même résultat que l'on commence par  $y$  ou par  $x$ .

### Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

On a vu à l'équation (1) que la différentielle de  $f$ , fonction de la variable  $x$ , est proportionnelle à la différentielle de  $x$  :  $df = f'(x)dx$ . On généralise dans le cas d'une fonction  $f$  des 2 variables  $x$  et  $y$  en utilisant les dérivées partielles de  $f$  :

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_y dx + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_x dy \quad . \quad (2)$$

On interprète  $df$  comme la variation de  $f$  lorsque  $x$  varie de la quantité infinitésimale  $dx$  et  $y$  de la quantité infinitésimale  $dy$ .

Si on a plus que 2 variables, par exemple si  $f$  est une fonction de  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$ , la différentielle de  $f$  s'écrit comme :

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right)_{\theta, \varphi} dr + \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)_{r, \varphi} d\theta + \left( \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_{r, \theta} d\varphi \quad .$$

Autrement dit, la différentielle de  $f$  est la somme des différentielles de chacune de ses variables, ces différentielles étant chacune multipliée par la dérivée partielle adéquate.

### Forme différentielle

On peut définir, à partir de  $A$  et  $B$ , deux fonctions des 2 variables  $x$  et  $y$ , la **forme différentielle**  $\omega$  suivante :

$$\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy \quad .$$

En général, il n'existe pas de fonction  $f$  telle que  $\omega$  en soit la différentielle. En revanche, s'il existe une fonction  $f$  des 2 variables  $x$  et  $y$  telle que  $\omega = df$ , on dit que  $\omega$  est une **différentielle totale exacte** (DTE). Évidemment, si  $f$ , fonction de 2 variables  $x$  et  $y$ , est différentiable,  $df$  est automatiquement une DTE. Pour qu'une forme différentielle quelconque  $\omega$  soit une DTE, il faut que  $A$  et  $B$  vérifient la **relation de Cauchy** suivante :

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \quad . \quad (3)$$

En effet, si on suppose qu'il existe  $f$  telle que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = B(x, y) \quad ,$$

le théorème de Schwarz redonne la relation de Cauchy :

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \quad .$$

↑  
théorème de Schwarz

Autrement dit, pour montrer que  $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$  est une DTE, on regarde si  $A$  et  $B$  satisfont la relation de Cauchy (3). Si c'est le cas, on détermine la fonction  $f$  dont  $\omega$  est la DTE en posant  $A = \partial f / \partial x$  ou  $B = \partial f / \partial y$  (cf. exercice **7.3** ).

## 7.1 Différentielles de fonctions d'une seule variable

1. La surface  $\mathcal{S}$  d'un disque de rayon  $R$  et le volume  $\mathcal{V}$  d'une boule de rayon  $R$  valent respectivement  $\mathcal{S} = \pi R^2$  et  $\mathcal{V} = 4\pi R^3/3$ . En interprétant  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{V}$  comme des fonctions de la variable  $R$ , calculer  $\mathcal{S}'(R)$  et  $\mathcal{V}'(R)$ . En déduire  $d\mathcal{S}$  et  $d\mathcal{V}$  en fonction de  $dR$ .

2. Soit  $f$  une grandeur physique qui dépend d'une distance notée  $x$ ,  $f = f_0(x/L)^2$ , avec  $f_0$  et  $L$  des constantes. Calculer  $df$  en fonction de  $dx$ .

On suppose maintenant que  $x$  dépend de la température  $T$ ,  $x = x_0 \ln(T/T_0)$ , avec  $x_0$  et  $T_0$  deux constantes. Calculer  $dx$  en fonction de  $dT$ .

Utiliser les deux relations précédentes pour combiner les différentielles et calculer  $\frac{df}{dx} \frac{dx}{dT}$ .

En fait, on va montrer que  $df = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dT} dT$ . C'est la «règle de la chaîne». Pour cela, exprimer  $f$  en fonction de  $T$  et calculer la dérivée de  $f$  par rapport à  $T$  pour retrouver l'expression de  $\frac{df}{dx} \frac{dx}{dT}$  obtenue précédemment.

## 7.2 Dérivées partielles et différentielles de fonctions de plusieurs variables

1. Soient les fonctions  $f_1(x, y) = 2x^2 - y^3 + 3$ ,  $f_2(x, y) = \cos(2xy) + 3 \sin(y)$ ,  $f_3(x, y) = \frac{x}{y}$  et  $f_4(x, y) = -3 \ln(x + y^2)$ . Calculer  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)_y$  et  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)_x$  avec  $i = 1, 2, 3$ , ou 4.

2. L'équation du gaz parfait pour une mole de gaz s'écrit  $PV = RT$  où  $P$ ,  $V$  et  $T$  sont respectivement la pression, le volume et la température du gaz.  $R$  est la constante des gaz parfaits. Calculer la dérivée partielle de  $P$  par rapport à  $V$  à  $T$  constante, et par rapport à  $T$  à  $V$  constant. En déduire la différentielle  $dP$  en fonction des différentielles  $dV$  et  $dT$ .

3. Soit  $S$  une grandeur dépendante des coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$ ,  $S = x^2 - y^2$ . Calculer les dérivées partielles de  $S$  par rapport à  $x$  à  $y$  constant, et par rapport à  $y$  à  $x$  constant. En déduire  $dS$  en fonction de  $dx$  et  $dy$ .

Sachant que  $x = \rho \cos \varphi$  et  $y = \rho \sin \varphi$ , exprimer  $S$  en fonction des coordonnées polaires  $\rho$  et  $\varphi$  et calculer les dérivées partielles de  $S$  par rapport à  $\rho$  à  $\varphi$  constant, et par rapport à  $\varphi$  à  $\rho$  constant. En déduire  $dS$  en fonction de  $d\rho$  et  $d\varphi$ .

Exprimer  $S$  en fonction de  $\rho$  et  $y$  et calculer les dérivées partielles de  $S$  par rapport à  $\rho$  à  $y$  constant, et par rapport à  $y$  à  $\rho$  constant. En déduire  $dS$  en fonction de  $d\rho$  et  $dy$ .

4. À partir de la relation entre les deux coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$  et la coordonnée  $\rho$  du repérage cylindrique, démontrer qu'on a la relation  $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho}$ .

## 7.3 Différentielles totales exactes (DTE)

1. Soit la forme différentielle  $\omega = 2(x + y)dx + (2x - 2y + 1)dy$ . Démontrer que c'est une différentielle totale exacte. Déterminer la fonction  $f$  des variables  $x$  et  $y$  dont  $\omega$  est la différentielle. Pour cela :

a) Poser que  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 2(x + y)$  et intégrer par rapport à  $x$  en considérant  $y$  constant :

b) Dériver l'expression obtenue par rapport à  $y$  à  $x$  constant, et la comparer à  $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = 2x - 2y + 1$ .

Intégrer par rapport à  $y$ . Donner finalement l'expression de  $f$  en fonction de  $x$  et de  $y$ .

2. (Facultatif) Soit  $\omega$  la forme différentielle suivante :

$$\omega = \left( -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} \right) dV + \frac{R}{V-b} dT$$

où  $V$  et  $T$  sont respectivement le volume et la température d'un gaz,  $a$  et  $b$  deux constantes et  $R$  la constante des gaz parfaits.

Montrer que  $\omega$  est une différentielle totale exacte.

Déterminer la fonction  $p$  dont  $\omega$  est la différentielle. Pour cela :

- Poser  $\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{R}{V-b}$  et intégrer par rapport à  $T$  en considérant  $V$  constant ;
- Dériver l'expression obtenue ci-dessus par rapport à  $V$  à  $T$  constant, et la comparer à  $\left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3}$ . Intégrer par rapport à  $V$ .
- En déduire que  $p$  vérifie l'équation de van der Waals qui décrit une mole de gaz réel :  $\left( p + \frac{a}{V^2} \right) (V-b) = RT$ . Que représente la grandeur  $p$  ?

## 7.4 Équations différentielles du premier ordre homogènes et à variables séparables

On a traité d'un certain type d'équation différentielle du premier ordre au thème 4, à savoir des équations différentielles linéaires et à coefficients constants. Si l'équation différentielle **n'est pas à coefficients constants et/ou est non linéaire**, la méthode de résolution vue au thème 4, exercice 1 ne s'applique pas. En général, il n'y a pas de méthode de résolution systématique, voire pas de résolution analytique possible.

Ici, nous allons traiter d'un type d'équation différentielle du premier ordre bien spécial. En utilisant l'écriture différentielle  $df = f'(x)dx$ , l'équation différentielle est dite **à variables séparables** si on peut la mettre sous la forme :

$$F(x)dx = G(f)df \quad ,$$

où  $F$  et  $G$  sont des fonctions d'une seule variable. On intègre ensuite le membre de gauche par rapport à la variable  $x$  d'une part, et le membre de droite par rapport à la variable  $f$  d'autre part, sans oublier la constante d'intégration. On obtient alors une relation entre  $f$  et  $x$  qu'on peut éventuellement manipuler pour exprimer  $f$  en fonction de  $x$ . La constante d'intégration ne peut être déterminée que par la donnée d'une condition initiale.

Résoudre les équations différentielles à variables séparables suivantes, en considérant  $f(x) > 0$  :

$$\frac{df}{dx} - xf(x) = 0 \quad , \quad \frac{df}{dx} = f(x) \cos(3x) \quad .$$

Calculer  $f^5$  à partir de l'équation :

$$\frac{df}{dx} = \frac{6}{f(x)^4} \quad .$$