Université Paul Sabatier de Toulouse, année universitaire 2018-2019

L3 LICENCE PHYSIQUE

RELATIVITÉ/PHYSIQUE NUCLEAIRE

TD 6

Équation de Dirac pour un fermion libre

L'équation de Dirac pour un fermion libre de masse au repos m_0 s'écrit en forme Lorentz covariante

$$(-\imath\hbar\,\gamma^\mu\,\partial_\mu + m_0 c\,\mathbb{1}_4)\ \underline{\Psi}(x) = \underline{0} \tag{1}$$

avec $\underline{\Psi}(x) = \begin{pmatrix} \underline{\Psi}^U(x) \\ \underline{\Psi}^L(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}$ le 4-spineur solution (fonction d'onde).

1. Valeurs propres d'énergie.
   Utilisez une solution de type onde plane en forme

$$\underline{\Psi}(x) = \begin{pmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \\ u_3(p) \\ u_4(p) \end{pmatrix} e^{-\frac{\imath}{\hbar}\,p\cdot x} \tag{2}$$

   ou x, p sont des quadrivecteurs et $\underline{u}$ est un 4-spineur fonction de l'impulsion pour déterminer les valeurs propres de l'énergie, selon les étapes suivantes:

   (a) Calculez

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\,\underline{\Psi}(x)$$
$$\frac{\partial}{\partial x^k}\,\underline{\Psi}(x)$$

   (b) Écrivez un système d'équations en forme matricielle pour le 4-spineur $\underline{u}$ en fonction des valeurs propres de l'impulsion.

   (c) Calculer le déterminant des coéfficients.

   (d) Montrer que ce déterminant est identique à

$$\left[\left(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2} + p^0\right)\left(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2} - p^0\right)\right]^2$$

   (e) En déduire les valeurs propres de l'énergie pour la particule.

2. Vecteurs propres.
   Déterminez les vecteurs propres selon les étapes suivantes:

(a) Montrez utilisant les résultats intermédiaires de la question (1) qu'on peut écrire un système d'équations sous la forme

$$\begin{pmatrix} (-p^0 + m_0 c)\ \mathbb{1}_2 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & (p^0 + m_0 c)\ \mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_A(p) \\ \underline{u}_B(p) \end{pmatrix} = \underline{0}) \tag{3}$$

(b) Démontrez la "relation de Dirac":

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})\, (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\, \mathbb{1}_2 + \imath \boldsymbol{\sigma}\, (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \tag{4}$$

(c) En déduire les quatre solutions $\underline{u}^{(K)}$, $K \in \{1, \ldots, 4\}$ et leurs valeurs propres d'énergie associées.
Indications: Trouver une expression pour $\underline{u}_A(p)$ en eliminant $\underline{u}_B(p)$ du système (3) à l'aide de la relation de Dirac. Regarder la limite $||\mathbf{p}|| \rightarrow 0$. Trouver la forme finale pur $\underline{u}_A(p)$ et $\underline{u}_B(p)$ par choix pour l'un des deux.