Université Paul Sabatier de Toulouse, année universitaire 2018-2019

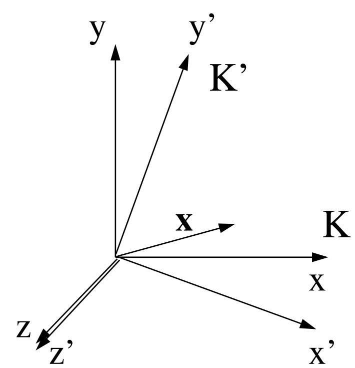
L3 LICENCE PHYSIQUE

RELATIVITÉ/PHYSIQUE NUCLEAIRE

TD 2

1. **Vecteurs contra- et covariantes**

   Considérez deux référentiels inertiels K et K' pour lesquels $O = O'$ et qui sont reliés par une rotation autour une axe.

   On regarde la transformation d'un vecteur position $\mathbf{x}$ en K vers K' dans l'espace réel $\mathbb{R}^3$. On utilise la notation matricielle avec indices indiquant des composantes d'un vecteur. De même on suppose somme d'Einstein sur indices repétées dans un terme.

   (a) Écrire l'équation de la transformation ainsi que l'équation de la transformation inverse.

   (b) D'en déduire une relation pour les composantes du vecteur $\boldsymbol{\nabla}_{x'}$.

   (c) Basé sur le résultat définissez les composantes d'un vecteur covariant et d'un vecteur contravariant en $\mathbb{R}^3$.

   (d) Montrer l'invariance du produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$ sous transformation de Galilée (ici rotation).

   (e) Donnez la relation entre composantes contra- et covariantes d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Conclusion?

2. **Transformation de Lorentz en formalisme covariant**

   Les expressions pour la transformation des composantes d'un vecteur de position, soit contra- soit covariant, s'écrivent, respectivement,

$$\begin{aligned} x^{\mu\prime} &= \Lambda^{\mu}_{\ \nu}\, x^{\nu} \\ x'_{\mu} &= x_{\nu}\left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}_{\ \mu} \end{aligned}$$

   Montrer que ces deux transformations correspondent à l'expression d'un boost de Lorentz en formulation originale. Restez au cas avec $\mu, \nu \in \{0, 1\}$ (boost le long une axe).

3. **“Quadri-nabla”** $\equiv \partial$

   (a) Comment se transforment les componsantes du quadrivecteur ‘dérivées par rapport aux composantes du quadrivecteur de position’,

      i. si les composantes de x sont dénotées x^μ ?

      ii. si les composantes de x sont dénotées x_μ ? Démontrez.

      Proposer alors une notation (indices) pour completer ∂.

   (b) À quoi correspond l’expression $\partial_\mu \partial^\mu$?

4. **Relation entre transformation de Lorentz et son inverse**

   (a) Montrer par teste explicite que la relation suivante soit valable:

$$\left(\Lambda^{-1}\right)^{\kappa}_{\ \mu} \left(\Lambda^{-1}\right)^{\lambda}_{\ \nu} g^{\nu\mu} = g^{\kappa\lambda} \tag{1}$$

   Restez au cas avec $\kappa, \lambda, \nu, \mu \in \{0, 1\}$.

   (b) *Montrer la relation suivante*

$$\left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}_{\ \mu} = g_{\nu\kappa} \, \Lambda^{\kappa}_{\ \lambda} \, g^{\lambda\mu}$$

   par manipulation de $\left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}_{\ \mu}$ *selon les étapes*

      i. introduire le symbôle de Kronecker δ^{ν}_{κ}*,*

      ii. remplacer le Kronecker par la métrique,

      iii. introduire le symbôle de Kronecker $\delta^{\alpha}_{\lambda}$*,*

      iv. remplacer le Kronecker par un produit de transformations de Lorentz,

      v. utiliser la relation (1).