lecture 8

A (very brief) discussion of the Dirac equation

$$\left(-i\hbar\,\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + m_0 c\,\mathbb{1}_4\right)\underline{\psi}(x) = \underline{0}$$

a) Lorentz transformation

The four-vector of Dirac matrices is

$$\{\gamma^{\mu}\} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0_2 \\ 0_2 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \\ \longrightarrow \\ \begin{pmatrix} 0_2 & \sigma \\ -\sigma & 0_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

written in the usual way with one time-like and ~~three~~ space-like components (indicated by vectors).

Obviously, the entries are scalar constants, $\{0, 1, -1, i, -i\}$, and these do <u>not</u> change with a change of reference frame! So how <u>do</u> the γ matrices transform?

In order that the Dirac equation be Lorentz covariant, the following condition must be satisfied: $\underline{\psi}'(x') \longrightarrow S\,\underline{\psi}(x)$

$$S^{-1}(\Lambda)\,\gamma^{\nu}\,S(\Lambda) = \Lambda^{\nu}{}_{\mu}\,\gamma^{\mu}$$

where S are matrices (4×4) and functions of the Λ matrices in Minkowski Space Time.

So the constant γ matrices undergo linear combination upon switching reference frames.

entz invariance de l'équation de Dirac

Soit une transformation telle que

$$\boxed{x' = \Lambda x + a}$$

← quadri-translation (→ groupe de Poincaré)

$K \underset{\Lambda^{-1}}{\overset{\Lambda}{\rightleftarrows}} K'$

La relations entre les spineurs de Dirac $\psi(x)$ et $\psi'(x')$ est donné par une transformation matricielle :

$$\underline{\psi}'(x') = \underline{\underline{S}}_\Lambda \underline{\psi}(x) = \underline{\underline{S}}_\Lambda \underline{\psi}(\Lambda^{-1}(x'-a))$$

$$\boxed{\underline{\psi}(x) = \underline{\underline{S}}_\Lambda^{-1} \underline{\psi}'(x')}$$

On fait ce remplacement dans l'équation de Dirac :

$$[-i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu + m_0 c \mathbb{1}_4] \underline{\psi}(x) = \underline{0}$$

avec $\partial_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu$

$$[-i\hbar \gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu + m_0 c \mathbb{1}_4] \underline{\underline{S}}_\Lambda^{-1} \underline{\psi}'(x') = \underline{0}$$

$\underline{\underline{S}}_\Lambda \cdot$

$$[-i\hbar \underline{\underline{S}}_\Lambda \gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu \underline{\underline{S}}_\Lambda^{-1} + \underline{\underline{S}}_\Lambda m_0 c \mathbb{1}_4 \underline{\underline{S}}_\Lambda^{-1}] \underline{\psi}'(x') = \underline{0}$$

$$[-i\hbar (\underbrace{\underline{\underline{S}}_\Lambda \gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu}_{} \underline{\underline{S}}_\Lambda^{-1}) \partial'_\nu + m_0 c \mathbb{1}_4] \underline{\psi}'(x') = \underline{0}$$

Les nombres de Clifford γ^μ sont des constantes, donc les mêmes dans tous les repères ⇒

$$\boxed{\underline{\underline{S}}_\Lambda^{-1} \gamma^\nu \underline{\underline{S}}_\Lambda = \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu} \quad *$$

$$\Rightarrow [-i\hbar (\underline{\underline{S}}_\Lambda \underline{\underline{S}}_\Lambda^{-1} \gamma^\nu \underline{\underline{S}}_\Lambda \underline{\underline{S}}_\Lambda^{-1}) \partial'_\nu + m_0 c \mathbb{1}_4] \underline{\psi}'(x') = \underline{0}$$

$$\boxed{[-i\hbar \gamma^\nu \partial'_\nu + m_0 c \mathbb{1}_4] \underline{\psi}'(x') = \underline{0}}$$

← forme souhaitée ! □.

L'équation de Dirac a la même forme dans tous les repères ⇒ Lorentz invariant !

* On montre que la solution de ce système d'équations s'écrit avec

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} a_+ & 0 & 0 & a_- \\ 0 & a_+ & a_- & 0 \\ 0 & a_- & a_+ & 0 \\ a_- & 0 & 0 & a_+ \end{pmatrix} \quad ; \quad a_\pm = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma \pm 1)}$$

pour un boost de Lorentz.

Pour inversion de l'espace :

$$\Lambda(I) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow S(\Lambda(I)) = \gamma^0$$

renversement du temps :

$$\Lambda(K) = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $S(\Lambda)$ en forme spécifique

b) Spectrum of the Dirac equation

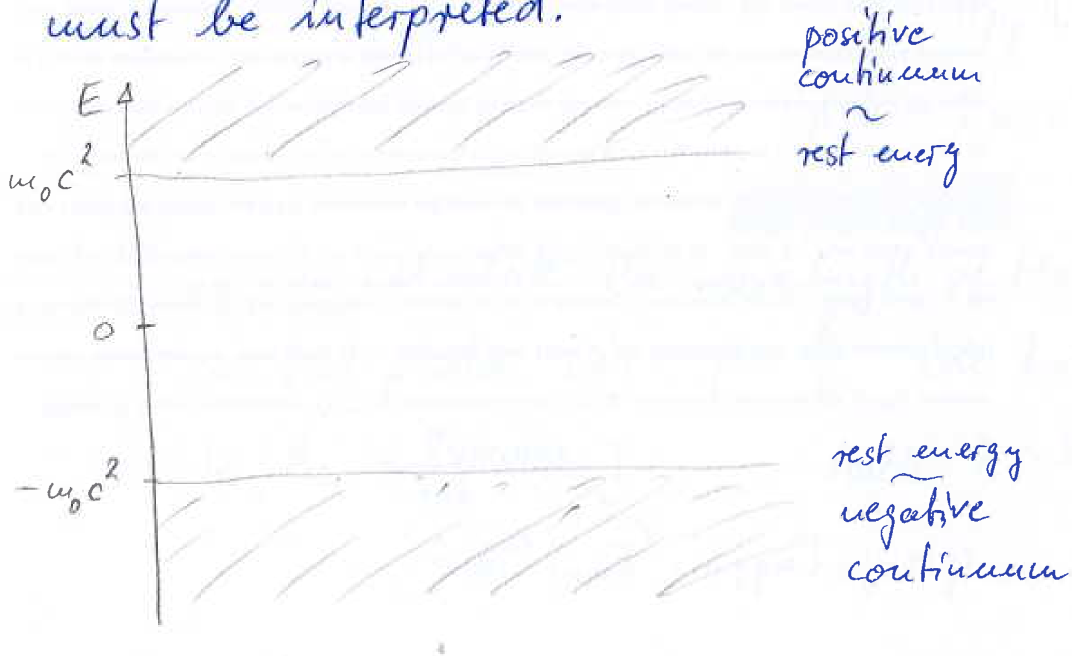
As we will derive in detail (TD) the energy eigenvalues of a free Dirac particle with rest mass m_0 are found as

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4} \qquad (2x)$$

There are four eigenvalues, each corresponding to a distinct solution spinor (eigenvector)

$$\underline{\psi}^{(k)}(x) = \begin{pmatrix} \psi_1^{(k)}(x) \\ \psi_2^{(k)}(x) \\ \psi_3^{(k)}(x) \\ \psi_4^{(k)}(x) \end{pmatrix} \qquad k \in \{1, \dots, 4\}$$

It is important to note that the negative-energy eigenvalues are now forced in Dirac theory, whereas in previous relativistic theory they were only suggested. These negative-energy states must be interpreted.



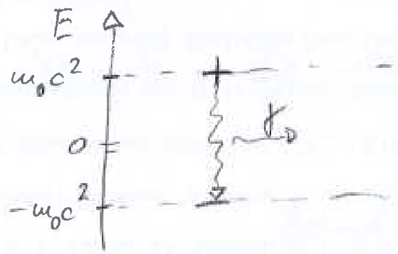
c) Stability of matter

It was known that an excited hydrogen atom decays with a certain probability within a time interval to

$$H^* \longrightarrow H + \gamma$$

and that this happens spontaneously.

Imagine a free electron at rest in frame K (lab.):



In a similar way, this system could now relax into a negative-energy state under emission of a photon (to conserve energy):

$$e^- \longrightarrow e^- + \gamma$$

with

$$E_e = m_e c^2 \qquad E_e' = -m_e c^2 \qquad E_\gamma' = 2 m_e c^2$$

$$E_\gamma' = \|\vec{p}_\gamma'\| c$$

$$\Rightarrow \quad \|\vec{p}_\gamma'\| = 2 m_e c$$

we can calculate the wavelength of the emitted photon via $p = \frac{h}{\lambda}$ (de Broglie)

to be $\approx \frac{\pi}{137}$ [a.u.] a_0 visible: $\lambda \sim 500$ [nm]

$\hat{=} 10^{-3}$ [nm] $= 1$ [pm], γ rays.

However, since the momentum of the photon is

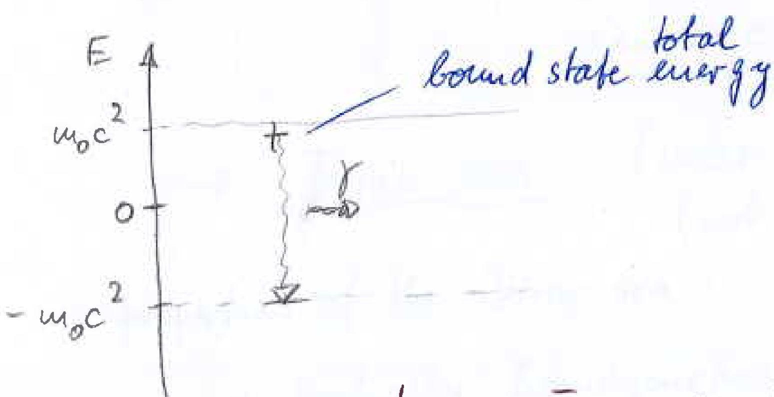
$$2 m_e c \neq 0$$

and the electron is at rest after decay, momentum conservation is violated:

$$p_e \, (=0) = (p_e' = 0) + 2 m_e c$$

This kind of decay is not possible.

But if the electron is bound, say in an atom with X^+ the nucleus, then



$$X^+ + \underset{(E>0)}{e^-} \longrightarrow X^+ + \underset{(E<0)}{e^-} + \gamma$$

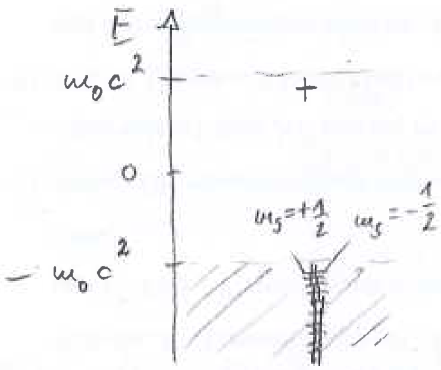
under energy <u>and</u> momentum conservation becomes possible!

<u>But</u>: This would imply that atomic matter is <u>not stable</u>. Free atoms should be radiating all the time, which they are <u>not</u>.
In fact, they should lose all their energy and disappear!

Historically : Heisenberg's open letter criticizing Dirac theory.

d) Hole theory

Dirac proposed the following solution to save his theory :



In accord with the (known) Pauli exclusion principle, all negative-energy states are already occupied in vaccum (with electrons).

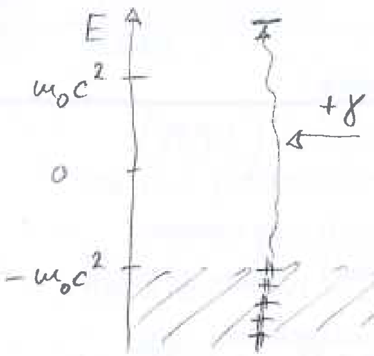
$\leadsto$ Dirac sea (mer de Dirac).
(not observable!)

properties of the Dirac sea :

* spatially homogeneous and infinite
* $E_{sea} = -\infty$ total energy
* $C_{sea} = -\infty$ total charge
* $S_{sea} = 0$ total spin (quantum number)
* $m_{0_{sea}} = +\infty$ total mass (rest)

So the background sea itself would not influence measurements (we only ever measure energy differences, so a homogeneous sea has no net effect on particles propagating in such a background.)

Consequences :



Given a (very) high energy photon (γ) a collision with a sea electron could create an observable electron as to

$$X^+ + \underset{\substack{(\text{sea}) \\ (E_{e^-} < 0)}}{e^-} + \underset{(E > 2m_0c^2)}{\gamma} \longrightarrow X^+ + \underset{(E_e' > m_0c^2)}{e^-}$$

free electron, observable!

This theoretical possibility would have the following consequences. The process leaves a hole in the sea.

The properties of this hole are :

$$m_{hole} = m_e \quad \text{(Hermann Weyl)}$$

$$E_{hole} = -(E_{e^-} < 0) > 0$$

$$C_{hole} = -(\underbrace{C_{e^-}}_{=-|e|} < 0) = +|e|$$

This corresponds to a particle with the rest mass of the electron and a positive charge (and energy).

Dirac proposed the existence of such a particle!

Cette argument pourrait être considéré comme blague,

mais : (1931) positron e^+ découvert dans rayonnement cosmique.

- "théorie des trous" (Dirac) remplacée aujourd'hui par moderne théorie des champs quantiques (seconde quantification, redéfinition du vide quantique).

Conséquence :

toute sorte de particule $\rightarrow$ antiparticule.

fermions : (connus)

e^-	e^+ (positron)
p^+	p^- (antiproton)
etc.	
n	$\bar{n}$ (antineutron)

autre notation:

e	$\bar{e}$
p	$\bar{p}$
etc.	

(1955) Bevatron Berkeley découverte de p^- et $\bar{n}$.

$\bar{n} \neq n$!

Conjugaison de charge $(\hat{C})$ relie matière et antimatière et inverse les autres propriétés de la particule aussi.

1930 - 1962) Neutrinos

observation :

~~…~~ désintégration nucléaire β (avec A au repos / labo) :

$$A \rightarrow B + e^-$$ (système complexe)

(noyau) (noyau$^+$)

le processus fondamental est

$$n \rightarrow p^+ + e^-$$

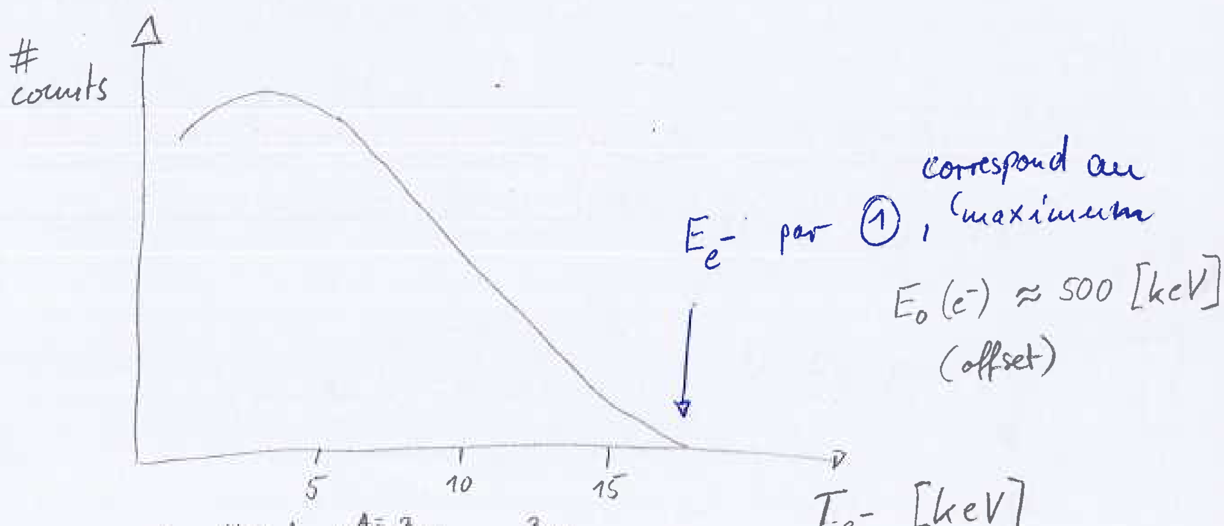
Calcul de l'énergie de l'électron pour cette désintégration (inélastique) (coll.) :

$$E_{e^-} = \frac{m_A^2 - m_B^2 + m_e^2}{2m_A} c^2 \qquad (1)$$

$\rightarrow$ comparer avec résultat pour $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$; très similaire, sauf "$-m_B^2$", car B a masse au repos ici, le neutrino n'a pas.

Donc E_{e^-} fixe pour 3 masses connues.

Observation expérience :



β-désint. : $^{3}_{1}H \rightarrow {}^{3}_{2}He$ ($A=3$, $Z=1$)

Donc e^- sort avec $E < E_{e^-}$ la plupart des ~~...~~ mesures.

$\Rightarrow$ Il manque de l'énergie ~~...~~ dans bilan de (1).

Niels Bohr : "abandonner conservation de l'énergie !"

(et aussi opposé 1) au photon (quantum) de Einstein,

2) théorie de Dirac

3) neutrino de Pauli

4) méson de Yukawa

5) approche de Feynman pour QED)

proposition de Pauli :

il sort une particule inconnue

de charge $c = 0$

proposait : neutron, n (donc $A \to B + e^- + n$ on travaillait pas encore avec le neutron)

mais : dans le diagramme E observé approche E_{e^-} (max.) dans certains cas !

$\Rightarrow$ La nouvelle particule doit avoir la propriété $(m_x)_0 \to 0$, car avec $E_x \approx \|\vec{p}_x\| c$ on peut avoir $E_x \to 0$ (pas de masse au repos) !

$p = \frac{h}{\lambda}$ et longueur d'onde de de Broglie peut être très grande !

Fermi : neutrino !

donc processus fondamental :

$$n \to p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$$

(un anti-neutrino, à clarifier pourquoi... ↓)

Recherche pour le neutrino (et antineutrino) :

~~(~1955) Cowan, Reines :~~

règle générale en théorie des particules :

"crossing symmetry" :

Si une réaction est observée, des réactions "croisées" sont principalement aussi possibles.

Croiser : particule conjugée à l'autre côté de la réaction.

↳ antiparticule.

(~1955) Cowan, Reines :

teste pour désintégration β "croisée" :

$$n \to p^+ + e^- + \bar{\nu}$$

croisement ⇒

$$p^+ + \bar{\nu} \to n + e^+$$

$\bar{\nu}$ ↑ soleil

e^+ ↑ détection du positron dans l'expérience.

⇒ confirmation existence du (anti-neutrino).

(1953) Konopinski, Mahmoud

Conservation du nombre de lepton L dans une réaction. $\boxed{L = L'}$ (basé sur observations expérimentales!)

équivalent à conservation de la charge $C = C'$

Teste : $n \to p^+ + e^- + \bar{\nu}$

$0 = 0 \quad 1 \quad -1$ ← anti-lepton, $L = -1$

$L = 0 \qquad L' = 0$ leptou, $L = +1$

définition : $\boxed{L = n_e - n_{\bar{e}}}$

Réaction croisée :

$$p^+ + \bar{\nu} \to n + e^+$$

$$0 \quad -1 \qquad 0 \quad -1$$

$$L = -1 \qquad L' = -1$$

✓

de même : (résulte du croisement de $n \to p^+ + e^- + \bar{\nu}$)

$$\nu + n \to p^+ + e^-$$

$$1 \quad 0 \qquad 0 \quad 1$$

$$L = 1 \qquad L' = 1$$

✓

<u>Davis</u> : recherche pour réaction :

$$\bar{\nu} + n \to p^+ + e^-$$

$$-1 \quad 0 \qquad 0 \quad 1$$

$$L = -1 \qquad L' = 1$$

résultat : pas observée !

$\Rightarrow$ confirmation consistence de la proposition conservation de L.

Revision désintégrations des pions et myons :

$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}$ $\quad -1 = C = C'$, $L = L' = 0$

$\pi^+ \to \mu^+ + \nu$ (anti-myon, $L=-1$) $\quad C = C' = 1$, $L = L' = 0$

$\mu^- \to e^- + \nu + \bar{\nu}$ $\quad C = C' = -1$, $L = L' = 1$

$\mu^+ \to e^+ + \nu + \bar{\nu}$ $\quad C = C' = 1$, $L = L' = -1$

Il restait un problème :

Le processus : $\mu^- \to e^- + \gamma$ $\quad C = C' = -1$, $L = L' = 1$

n'a été jamais observé.

Solution :

séparation de conservation de L en conservation de L_μ et L_e :

$\Rightarrow$ $\mu^- \not\to e^- + \gamma$ car

$L_\mu = 1$ $\quad L'_\mu = 0$ $\quad$ donc interdit.

$L_e = 0$ $\quad L'_e = 1$

Confirmation finale (1962) :

comparaison entre

1) $\bar{\nu}_\mu + p^+ \to \mu^+ + n$

$C = C' = 1$, $L_\mu = L'_\mu = -1$

$L_e = L'_e = 0$

de désintég. π^-

avec $10^{14}\ \bar{\nu}_\mu$

2) $\bar{\nu}_\mu + p^+ \to e^+ + n$

$C = C' = 1$, $\underset{-1}{\underset{\parallel}{L_\mu}} \neq L'_\mu = 0$

$0 = L_e \neq L'_e = 1$

1) ~~...~~ 29 positifs

2) 0 positifs

Famille de leptons 1962–1976

leptons	L	=	L_e	+	L_μ
e^-	1		1		0
ν_e	1		1		0
μ^-	1		0		1
ν_μ	1		0		1
antileptons					
e^+	−1		−1		0
$\bar{\nu}_e$	−1		−1		0
μ^+	−1		0		−1
$\bar{\nu}_\mu$	−1		0		−1

résumé processus :

$n \to p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$

$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$

$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$

$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$

$\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$

(on peut vérifier consistance !)