Collisions en relativité

~~1.3.1~~ 1.5 Cinématique relativiste ; Collisions

lecture 6

Processus tellement rapide que des forces extérieures (e.g. gravitation) n'ont pas d'influence.

Théorie Non-relativiste ; conservations

1. $\sum_j m_j = \sum_j m_j'$ conservation de la masse totale (m_j initiale, m_j' finale de particule j)

2. $\sum_j \vec{p}_j = \sum_j \vec{p}_j'$ conservation de l'impulsion

3. E_{cin} peut être conservée.

types de collisions :

coll. inélastiques

1. "Sticky" collision (collante ?)

   $\sum_j T_j > \sum_j T_j'$ énergie cinétique diminue (chaleur)

   (cas extrême : $A+B \to C$)

2. "Explosive" collision

   $\sum_j T_j < \sum_j T_j'$ énergie cinétique augmente (énergie interne d'une particule libérée)

   (cas extrême : $A \to C+D$)
   (desintégration)

3. Collisions élastiques

   $\sum_j T_j = \sum_j T_j'$ énergie cinétique conservée.

Théorie relativiste

$\Rightarrow \sum_j m_j \cancel{\gamma} = \sum_j m_j' \cancel{\gamma}$ avec $m_j = m_{0_j} \cdot \gamma$

1. $\sum_j E_j = \sum_j E_j'$ conservation de l'énergie <u>totale</u>.
(≙ masse relativiste conservée, pas forcement masses au repos!)

2. $\sum_j \vec{p}_j = \sum_j \vec{p}_j\,'$ conservation de l'impulsion rel.

↪ "Quadri conservation"

$$\begin{pmatrix} \sum_j \frac{E_j}{c} \\ \sum_j \vec{p}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j \frac{E_j'}{c} \\ \sum_j \vec{p}_j\,' \end{pmatrix}$$

3. T peut être conservée.

types de collisions :

1. "Sticky" collision

$\sum_j T_j = T_{rel} > T_{rel}' = \sum_j T_j'$ énergie cinétique diminue

$\sum_j E_{0_j} = E_0 < E_0' = \sum_j E_{0_j}'$ énergie au repos augmente (donc aussi masse au repos augm.)

2. "Explosive" collision

$$\sum_j T_j = T < T' = \sum_j T_j'$$

$$\sum_j E_{0_j} = E_0 > E_0' = \sum_j E_{0_j}'$$

ce sont de types inélastiques.

3. Collision élastique

$E_0 = E_0'$ énergie au repos conservée

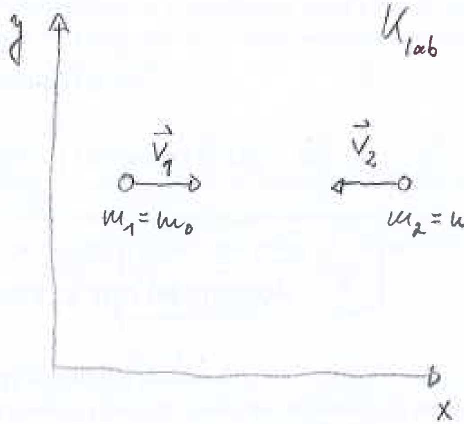
$T = T'$ énergie cinétique conservée.

1.5.1 Exemple 1 : Conversion d'énergie (relativiste)

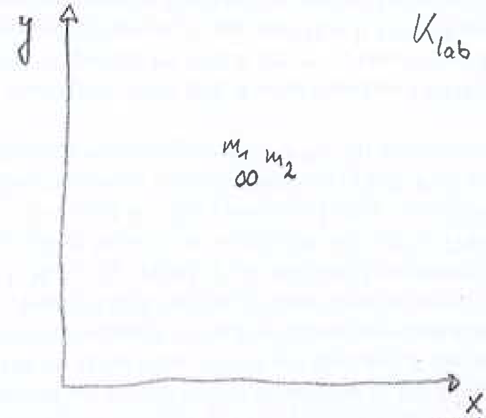
Deux morceaux de terre en collision frontale ;

vitesses $v = \frac{3}{5}c$;

collision inélastique (extrême). "sticky collision".



avant collision



après collision

Question : Quelle est la masse M après collision ?

Traitement.

$$E_M = Mc^2$$ Énergie relativiste du morceaux après collision

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_M$$ Conservation de l'impulsion (avant = après $(\vec{p}\,' = \vec{p}_M)$)

comme $\vec{p}_1 = m_0 \gamma \vec{v}_1$, $\vec{p}_2 = m_0 \gamma \vec{v}_2$ et $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$

$$\Rightarrow \vec{p}_2 = -\vec{p}_1 \Rightarrow \vec{p}_M = \vec{0}$$

M est au repos après collision. $\Rightarrow \gamma_M = 1 \Rightarrow M = M_0$

$$\Rightarrow E_M = M_0 c^2$$ (pas d'énergie cinétique après collision)

on peut formuler

$$M_0 c^2 = E_1 + E_2$$ (conservation de l'énergie

avant : $E_1 + E_2$

après : E_{M_0})

et avec $E_1 = m_0 \gamma c^2 = E_2$

$$\text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{9}{25}\frac{c^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{25}}} = \frac{5}{4}$$

l'énergie totale s'écrit alors :

$$E_1 + E_2 = 2 m_0 \gamma c^2 = \frac{5}{2} m_0 c^2$$

$$\Rightarrow M_0 c^2 = \frac{5}{2} m_0 c^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{M_0 = \frac{5}{2} m_0}$$

on constate :

- Masse au repos avant collision : $2 m_0 = \frac{2 E_{0_1}}{c^2}$
- Masse au repos après collision : $\frac{5}{2} m_0$

$\Rightarrow$ augmentation de la masse au repos !

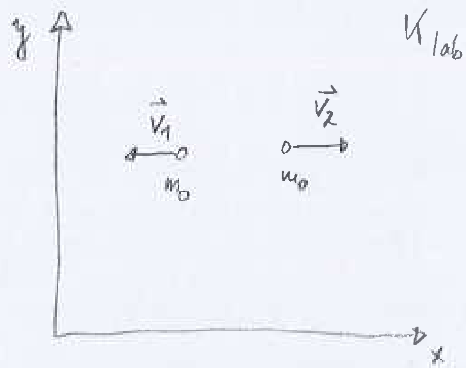
$\boxed{\text{conversion} \quad T_{1/2} \rightarrow E_{M_0}}$ effet relativiste

$\hat{=}$ collision inélastique "sticky".

Exemple 2 (1.5.2) : Énergie Seuil pour Désintégration

Une particule de masse M_0 (au repos) désintègre en deux particules de masse m_0.

Quelle est la vitesse de chaque produit ?



après collision

$\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\|$ ⇐ (conservation de l'impulsion)

détail: ⇓

$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_M = \vec{0}$ (repos)

$\Rightarrow \vec{p}_1 = -\vec{p}_2$

$\Rightarrow \gamma_1 \vec{v}_1 = -\gamma_2 \vec{v}_2 \Rightarrow \frac{1}{\gamma_2}\|\vec{v}_1\| = \frac{1}{\gamma_1}\|\vec{v}_2\|$

au carré

$\Leftrightarrow (c^2 - v_2^2)\, v_1^2 = (c^2 - v_1^2)\, v_2^2$

$\Leftrightarrow \cancel{c^2} v_1^2 - v_1^2 v_2^2 = \cancel{c^2} v_2^2 - v_1^2 v_2^2$

$\Leftrightarrow v_1^2 = v_2^2$ $\square$.

$(\Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2)$

donc ils sortent "dos-à-dos" avec le même module de vitesse.

(conservation de l'énergie)

$$M_0 \cancel{c^2} = 2 m_0 \gamma \cancel{c^2}$$

(E avant) (E après) $(= E_1 + E_2)$

$$\Leftrightarrow \gamma \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{M_0}{2 m_0}$$

au carré

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \left(\frac{M_0}{2 m_0}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow c^2 - v^2 = \frac{(2 m_0)^2 c^2}{(M_0)^2}$$

$$\Leftrightarrow v^2 = c^2 - \left(\frac{2 m_0}{M_0}\right)^2 c^2 = c^2 \left(1 - \left(\frac{2 m_0}{M_0}\right)^2\right).$$

$$\Leftrightarrow v = c \sqrt{1 - \left(\frac{2 m_0}{M_0}\right)^2}$$

Conclusion :

Il faut que $M_0 \geq 2m_0$, sinon vitesse devient imaginaire, ↯ observable.

généralisation : $\boxed{M_0 \geq \sum_i m_0(i)}$ (*)

Donc on définit

$E_0 = M_0 c^2$
$E_0 = 2m_0 c^2$ } l'énergie seuil (énergie minimale nécessaire) pour le processus de désintégrat. [$M \to m_0 + m_0$ spontanée.]

$E_0 = \left(\sum_i m_{0i}\right) c^2$ généralisation.

Un surplus d'énergie initiale est possible (repos ou T ou les deux). Dans ce cas, le surplus sera converti en T' (de produits).

exemple réel.

stabilité du deutéron (~~deuton~~ ?) ; processus : $d \to p + n$

$m_d = 1875.6 \ \frac{\text{MeV}}{c^2}$ donc $m_d < m_p + m_n$

$m_p + m_n = 1877.9 \ \frac{\text{MeV}}{c^2}$ et le deuteron est stable !

commentaire.

On sont les $\Delta m \simeq 2.3 \ \frac{\text{MeV}}{c^2}$?

réponse : énergie de liason p-n , qui est positive !

⇒ pas de desintégration spontanée,

il faut fournir de l'énergie pour desintégrer d.

(équivalence énergie-masse ; énergie de la liaison correspond à masse $\Delta m = 2.3 \ \frac{\text{MeV}}{c^2}$)

(*) généralisation basée sur l'idée de désintégrations successives en 2 particules

Exemple 3 1.5.3 : Différentes particules ; vitesses

Un pion ($\pi^- = d\bar{u}$ (d : $C = -\frac{1}{3}$; $\bar{u}$: $C = -\frac{2}{3}$) down anti-up quark ;
méson ;
$C = -1$
$m_\pi = 139.569 \ \frac{MeV}{c^2}$)

desintègre en muon + muon-neutrino (ν_μ , lepton, $C = m_\nu = 0$)
(μ^- , $C = -1$ lepton ; $m_\mu = 105.659 \ \frac{MeV}{c^2}$)

processus : $\boxed{\pi^- \longrightarrow \mu^- + \nu_\mu}$

Quelle est la vitesse du muon μ^- ?

méthode A : chemin directe

énergie avant : $E_\pi = m_\pi c^2$ ($m_\pi = (m_\pi)_0$, repos)

énergie après : $E_\mu = c\sqrt{\vec{p}_\mu^{\,2} + m_\mu^2 c^2}$ (pas au repos ; avec relation énergie impulsion)

$+ \qquad\qquad +$

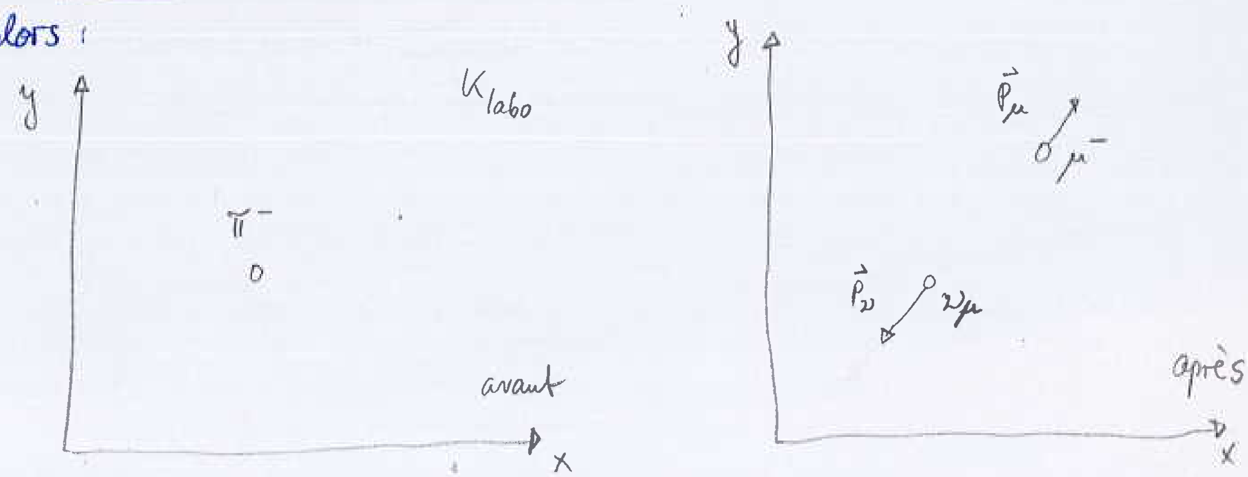
$E_\nu = \|\vec{p}_\nu\| c$ (commentaire : $m_\nu = 0$, mais impulsion via de-Broglie, théorie quantique)

de plus :

$\vec{0} = \vec{p}_\pi = \vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu$ conservation de l'impulsion

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \vec{p}_\mu = -\vec{p}_\nu \\ \Rightarrow \|\vec{p}_\mu\| = \|\vec{p}_\nu\| \end{array}}$$

alors :



Donc la conservation de l'énergie s'écrit :

$$m_\pi c^{\cancel{2}} = \cancel{c}\sqrt{\vec{p}_\mu^{\,2} + m_\mu^2 c^2} + \|\vec{p}_\mu\|\cancel{c} \iff m_\pi c - \|\vec{p}_\mu\| = \sqrt{\vec{p}_\mu^{\,2} + m_\mu^2 c^2}$$

au carré

$$\iff \left(m_\pi c - \|\vec{p}_\mu\|\right)^2 = m_\mu^2 c^2 + \vec{p}_\mu^{\,2}$$

$$\cancel{\|\vec{p}_\mu\|^2} - 2 m_\pi \cancel{c} \|\vec{p}_\mu\| + m_\pi^2 c^{\cancel{2}} = m_\mu^2 c^{\cancel{2}} + \cancel{\vec{p}_\mu^{\,2}}$$

$$\boxed{\|\vec{p}_\mu\| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2 m_\pi} c}$$

(Déduire la vitesse de manière directe est typiquement mauvaise stratégie ; il est mieux de déterminer E et $\vec{p}$ de la particule et d'en déduire la vitesse.)

Donc énergie du μ^- :

$$E_\mu^2 - \vec{p}_\mu^{\,2} c^2 = m_\mu^2 c^4$$ relation énergie-impulsion pour μ.

exprimer $\vec{p}_\mu^{\,2}$ d'une autre manière :

$$E_\pi = m_\pi c^2 \qquad (\vec{p}_\pi = \vec{0})$$

$$E_\nu = \|\vec{p}_\nu\| c = \|\vec{p}_\mu\| c \qquad \text{(avec conserv. impulsion)}$$

$$\Rightarrow E_\mu = E_\pi - E_\nu \qquad \text{(cons. E)}$$

$$= m_\pi c^2 - \|\vec{p}_\mu\| c$$

$$\iff \vec{p}_\mu^{\,2} = \frac{E_\mu^2}{c^2} - 2 m_\pi E_\mu + m_\pi^2 c^2$$

injecté

$$\cancel{E_\mu^2} - \cancel{E_\mu^2} + 2 m_\pi E_\mu c^2 - m_\pi^2 c^4 = m_\mu^2 c^4$$

$$2 m_\pi E_\mu \cancel{c^2} = m_\mu^2 c^2 + m_\pi^2 c^2$$

$$\boxed{E_\mu = \frac{m_\mu^2 + m_\pi^2}{2 m_\pi} c^2}$$

Dès qu'on connait E et $\|\vec{p}\|$ d'une particule, la vitesse est obtenue facilement :

en général : $\vec{p} = m_0 \gamma \vec{v}$

$E = m_0 \gamma c^2$

$$\Rightarrow \frac{\vec{p}}{E} = \frac{\vec{v}}{c^2} \Leftrightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{E}}$$

Alors ici :

$$\|\vec{v}_\mu\| = \frac{\|\vec{p}_\mu\| c^2}{E_\mu} = \frac{\frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{\cancel{2m_\pi}} c^{\cancel{3}}}{\frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{\cancel{2m_\pi}} \cancel{c^2}} = \boxed{\frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} c = v_\mu}$$

l'application numérique donne

$$v_\mu = 0{,}271\ c.$$

méthode B (produit scalaire Minkowski) :

On note qu'on peut écrire les lois de conservation en forme d'un quadrivecteur :

$$p_\pi = \begin{pmatrix} p^0_\pi = \frac{E_\pi}{c} \\ \vec{p}_\pi \end{pmatrix} = p_\mu + p_\nu = \begin{pmatrix} \frac{E_\mu}{c} + \frac{E_\nu}{c} = p^0_\mu + p^0_\nu \\ \vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu \end{pmatrix}$$

carré du quadrivecteur

$$\Leftrightarrow \underbrace{p_\nu^2}_{= p_\nu^R p_{\nu R}} = p_\pi^2 + p_\mu^2 - 2 \underbrace{p_\pi \cdot p_\mu}_{= p_\pi^R p_{\mu R}}$$

produit scalaire dans l'espace-temps de Minkowski

on constate que

rel. E-p pour ν : $p_\nu^2 = \frac{E_\nu^2}{c^2} - \|\vec{p}_\nu\|^2 = \frac{\|\vec{p}_\nu\|^2 c^2}{c^2} - \|\vec{p}_\nu\|^2 = \boxed{0 = p_\nu^2}$

car $p_\pi = \begin{pmatrix} \frac{E_\pi}{c} = \frac{E_{0\pi}}{c} \\ \vec{p}_\pi = \vec{0} \end{pmatrix}$; $\boxed{p_\pi^2 = m_\pi^2 c^2}$ $\left(= \frac{E_{0\pi}^2}{c^2} = \frac{m_\pi^2 c^4}{c^2} = m_\pi^2 c^2 \right)$; $\vec{p}_\pi = \vec{0}$

détails

q.v.

p_μ : $p_\mu^2 = \frac{E_\mu^2}{c^2} - \|\vec{p}_\mu\|^2 \overset{\text{rel. } E-p}{=} \frac{\|\vec{p}_\mu\|^2 c^2 + m_\mu^2 c^4}{c^2} - \|\vec{p}_\mu\|^2 = m_\mu^2 c^2$

il manque encore :

$$p_\mu \cdot p_\pi \underset{\text{prod. scalaire}}{=} \frac{E_\pi}{c}\frac{E_\mu}{c} - \underbrace{\vec{p}_\pi}_{=\vec{0}} \cdot \vec{p}_\mu = \frac{m_\pi c^2}{c}\frac{E_\mu}{c} = m_\pi E_\mu$$

$$\Rightarrow \quad 0 = m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - 2 m_\pi E_\mu$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2 m_\pi} c^2} \qquad \text{(comme avant)}$$

et aussi (expression pour $\|\vec{p}_\mu\|$ et donc la vitesse :

$$p_\mu = p_\pi - p_\nu \qquad \text{(quadriconservation)}$$

au carré

$$\frac{E_{\pi_0}}{c}\frac{E_\nu}{c} - \underbrace{\vec{p}_\pi}_{=\vec{0}} \cdot \vec{p}_\nu$$

$$\Leftrightarrow \quad p_\mu^2 = p_\pi^2 + p_\nu^2 - 2 p_\pi \cdot p_\nu$$

$$\Leftrightarrow \quad m_\mu^2 c^2 = m_\pi^2 c^2 - 2 \frac{m_\pi c^{\cancel{2}}}{\cancel{c}} \frac{E_\nu}{\cancel{c}} = m_\pi^2 c^2 - 2 m_\pi E_\nu$$

et avec $E_\nu = \|\vec{p}_\nu\| c = \|\vec{p}_\mu\| c$ (avec cons. impulsion)

$$\Rightarrow \quad m_\mu^2 c^{\cancel{2}} = m_\pi^2 c^{\cancel{2}} - 2 m_\pi \|\vec{p}_\mu\| \cancel{c}$$

$$\Leftrightarrow \quad \|\vec{p}_\mu\| = \frac{-m_\mu^2 + m_\pi^2}{2 m_\pi} c \qquad \text{(comme avant)}.$$

et on obtient le même résultat.

Cette deuxième méthode via les produits scalaires est généralement la méthode recommandée pour des problèmes plus complexes.