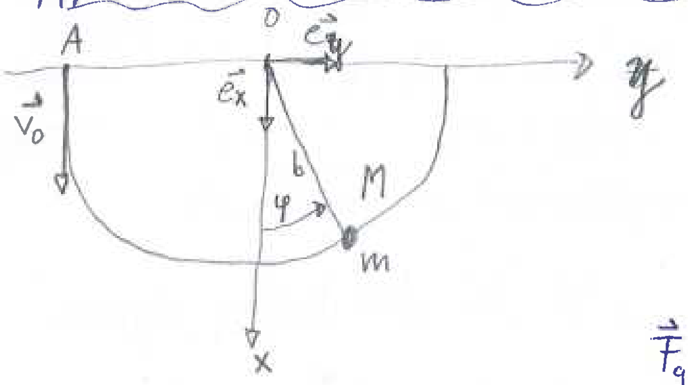
III. Mouvement sur un demi-cylindre

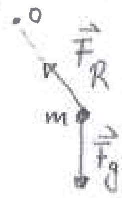
A. Concavité dirigée vers le haut



$\varphi(t) = (\vec{e}_x, \vec{OM})$

$A = (0, -b, 0)$

$\vec{F}_g$, $\vec{F}_R$



1. Trajectoire plane (pas demandé, point supp.)

Via théorème du moment cinétique :

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O(\vec{F}_g) + \vec{M}_O(\vec{F}_R)$$ moment de force

$$= \vec{OM} \times \vec{F}_g + \vec{OM} \times \vec{F}_R$$ on représente en polaire :

$$= \underbrace{OM}_{=b}\, \vec{e}_\rho \times F_g \vec{e}_x + \underbrace{OM \vec{e}_\rho \times (-F_R \vec{e}_\rho)}_{=\vec{0}}$$

$$= \underbrace{OM}_{=b} \cdot F_g \left(\underbrace{\cos\varphi\, \vec{e}_x \times \vec{e}_x}_{=\vec{0}} + \sin\varphi\, \vec{e}_y \times \vec{e}_x \right)$$

$$\vec{M}_O = -F_g\, b \sin\varphi\, \vec{e}_z$$

$F_g > 0$ supposé.

$\sin\varphi(t)$ fonction de temps

mais comme $\vec{M}_O = \dfrac{d\vec{L}_O}{dt}$ $\left(\Rightarrow \vec{L}_O \parallel +\vec{e}_z \right)$

donc $\vec{L}_O$ de direction constante *

⇒ mouvement dans le plan (O, x, y)

$-F_g\, b \sin\varphi\, \vec{e}_z = \dfrac{d}{dt} \vec{L}_O$

$\cdot \vec{e}_z \Rightarrow -F_g\, b \sin\varphi = \left(\dfrac{d}{dt} \vec{L}_O \right) \cdot \vec{e}_z$

$\cdot \vec{e}_x \Rightarrow \left(\dfrac{d}{dt} \vec{L}_O \right) \cdot \vec{e}_x = \dfrac{d}{dt} L_{Ox} = 0$

on calcule : $\dfrac{d}{dt} \left(\vec{L}_O \cdot \vec{e}_x \right) = \left(\dfrac{d}{dt} \vec{L}_O \right) \cdot \vec{e}_x + \vec{L}_O \cdot \underbrace{\dfrac{d}{dt} \vec{e}_x}_{=\vec{0}}$

same for $\cdot \vec{e}_y$. $\Rightarrow \dfrac{d}{dt} L_{Oy} = 0 \Rightarrow \vec{L}$ de direction constante.

1.2. Travail de $\vec{F}_R$

$$dW(\vec{F}_R) = \vec{F}_R \cdot \vec{dl} \qquad \text{avec } F_R > 0$$

$$= \underbrace{-F_R \vec{e}_\rho \cdot dl_\varphi \vec{e}_\varphi}_{=0} = 0$$

La réaction ne travaille pas.

Énergie potentielle de M :

$$dW(\vec{F}_g) = \vec{F}_g \cdot \vec{dl} = mg\,\vec{e}_x \cdot (dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y)$$

$$= mg\,dx = -dE_p$$

$$\Rightarrow \frac{dE_p}{dx} = -mg$$

$$E_p = -mg\,x + \text{const.}(x)$$

$x = b\cos\varphi$ (en polaire)

$$E_p = -mgb\cos\varphi + \text{const.} \quad \left(\text{car } \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\right)$$

$$E_p\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \text{const.} = 0$$

$$\boxed{E_p = -mgb\cos\varphi}$$

2.B. Énergie cinétique

$$E_c = \frac{m}{2}\|\vec{v}_{M/R}\|^2$$

$\vec{v}_{M/R}$ en polaire (cylindrique) :

$$\vec{v}_{M/B_c} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \quad \text{(plan)}$$

$\rho = b \Rightarrow \dot{\rho} = 0$

$$\vec{v}_{M/R/B_c} = b\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\|\vec{v}_M\| = \sqrt{b^2\dot{\varphi}^2} = b\dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_c = \frac{m}{2} b^2 \dot{\varphi}^2}$$

3/. Énergie mécanique de M

$$E_M = E_c + E_p = \frac{m}{2} b^2 \dot{\varphi}^2 - mgb\cos\varphi$$

$\vec{F}_g$ est force conservative $\Rightarrow E_M = \text{const.}$, $\Delta E_M = 0$

4/. $E_M = \text{const.}$, chaque instant possible (c'est alors $E_M(A)$)

$$\Rightarrow E_M(t=0) = E_M = \frac{m}{2} v_0^2 \quad \left(-mgb\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0\right)$$ toujours conservée

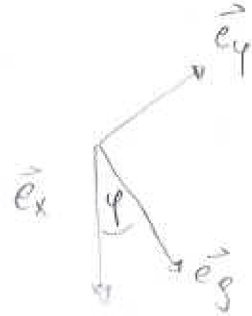
$$\Rightarrow \frac{m}{2} v_0^2 = \frac{m}{2} b^2\dot{\varphi}^2 - mgb\cos\varphi$$

la vitesse générale est $v = b\dot{\varphi}$

$$\Rightarrow \frac{m}{2} v_0^2 + mgb\cos\varphi = \frac{m}{2} v^2$$

$$\Leftrightarrow v^2 = v_0^2 + 2gb\cos\varphi$$

$$\boxed{v = +\sqrt{v_0^2 + 2gb\cos\varphi}}$$



$\Downarrow$

$\vec{F}_g = mg\,\vec{e}_x$
$= mg(\cos\varphi\,\vec{e}_\rho - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi)$

5/. Loi fondamentale dynamique et réaction

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_g + \vec{F}_R = \begin{pmatrix} mg\cos\varphi \\ -mg\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{B_C} + \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_c}$$

$$\vec{a}_{M/R} \overset{(\text{gén.})}{=} (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi \; (+\cancel{\ddot{z}\,\vec{e}_z})$$

$$\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{M/R/B_c} = -b\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho + b\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

LFD

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} mg\cos\varphi - R &= -mb\dot{\varphi}^2 \\ -mg\sin\varphi &= mb\ddot{\varphi} \end{aligned}\right\} \text{LFD}$$

(éq. en ρ)

(éq. en φ)

$$\Rightarrow \boxed{R = mg\cos\varphi + mb\dot{\varphi}^2} \qquad \vec{R} = -\left(mg\cos\varphi + mb\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\rho$$

zéros de R ?

$$v = b\dot{\varphi}$$

$$v^2 = b^2\dot{\varphi}^2 \Rightarrow R = mg\cos\varphi + m\frac{v^2}{b}$$

$$R = mg\cos\varphi + \frac{m}{b}\left(v_0^2 + 2gb\cos\varphi\right)$$ avec résultat pour v.

$$\Leftrightarrow \boxed{R = \frac{m}{b}v_0^2 + 3mg\cos\varphi} \qquad (*)$$

$\Rightarrow R = 0$ ~~et~~ et $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ (valeurs possibles)

seulement si $v_0 = 0$

au plus bas de la trajectoire :

$$\varphi = 0 \Rightarrow \boxed{R = \frac{m}{b}v_0^2 + 3mg}$$

5. ~~7.~~ Équation de mouvement en φ, $\ddot{\varphi}$

expression de E_M en B_c, et conservation de E_M :

$$\frac{d}{dt}E_M = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}b^2\dot{\varphi}^2 - mgb\cos\varphi\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{2}b^2 \cdot 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + mgb\dot{\varphi}\sin\varphi = 0$$

$$\Leftrightarrow b\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + g\dot{\varphi}\sin\varphi = 0$$

$\dot{\varphi}$ jamais zéro, donc

$$\Leftrightarrow b\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0$$ généralement vrai

et avec LFD, éq. en φ (pareil !)

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{b}\sin\varphi = 0}$$

solution oscillatoires pour φ, physiquement raisonnable.