I. Énergie potentielle de gravitation

1. $\vec{F}_{g_{M\to m}} = -G \dfrac{m M_T}{r^2} \vec{e}_r$ $\qquad \vec{OA} = (R_T + h)\vec{e}_r$

$h \to 0 \Rightarrow \vec{F}_g \to$ pésanteur $\qquad = r\,\vec{e}_r$

2. $-dE_p = \vec{F}_g \cdot \vec{dl}$

$$E_p = -\int \vec{F}_g \cdot \vec{dl} + C \qquad \vec{dl} = \vec{e}_r\, dr$$

$$= -\int -G \frac{m M_T}{r^2}\, dr + C$$

$$= -G m M_T \frac{1}{r} + C$$

$$E_p(r = \infty) = 0$$

$$\Rightarrow C = 0$$

$$E_p(r) = -G m M_T \frac{1}{r}$$

3. $E_m = E_c + E_p = \dfrac{m}{2} \vec{v}^{\,2} - G m M_T \dfrac{1}{r}$

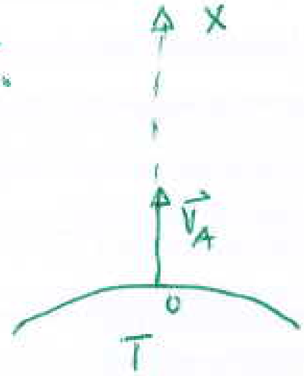
4. Condition : $E_m \geq 0$ état non-lié.

$$\Rightarrow \frac{m}{2} v^2 \geq G m M_T \frac{1}{r}$$

$$v^2 \geq \frac{2 G M_T}{r} = \frac{2 G M_T}{R_T + h}$$

$$v \geq \sqrt{\frac{2 G M_T}{R_T + h}}$$

5.



$$\vec{F}_p = -mg\,\vec{e}_x$$

$$\Rightarrow E_p = -\int -mg\,\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x\,dx + C$$

$$= mgx + C$$

(pas important de déterminer la constante en ce moment.)

Théorème de l'énergie cinétique :

$$W = \Delta E_c = -\Delta E_p$$

$$\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = \frac{m}{2}v_f^2 - \frac{m}{2}v_L^2$$

$$\Delta E_p = E_{p_f} - E_{p_i} = mgx_f \cancel{+C} - mg\underbrace{x_i}_{=0} \cancel{-C}$$

$$= mgx_f$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{m}}{2}v_f^2 - \frac{\cancel{m}}{2}v_L^2 = -\cancel{m}gx_f$$

condition : $v_f = \frac{1}{4}v_L$

$$\Rightarrow \frac{1}{32}v_L^2 - \frac{1}{2}v_L^2 = -gx_f$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_f = +\frac{15}{32}\frac{v_L^2}{g}}$$

(AN. : $g = 9.8$ [S.I.]

$v_L = 10$ [S.I.]

$$\Rightarrow x_f = \frac{15 \cdot 100}{32 \cdot 9.8} \text{ [S.I.]}$$

$$\simeq 4.8 \text{ [m]}$$)

6. Idée : on cherche l'expression de l'énergie cinétique en fonction de la position.

a) résoudre l'équation de mouvement

$F = m\dot{v}$ (mouvement sur axe x seulement)

$-mg = +m\dot{v}$

$-g = \dot{v}$

$\Rightarrow v(t) = -gt + C$

$v(t=0) = v_L \Rightarrow C = v_L$

$\Rightarrow \boxed{v(t) = v_L - gt}$ (1)

$\dot{x} = v_L - gt$

$\Rightarrow x(t) = v_L t - \frac{g}{2}t^2 + C'$

$x(t=0) = 0 \Rightarrow C' = 0$

$\Rightarrow \boxed{x(t) = v_L t - \frac{g}{2}t^2}$ (2)

b) on détermine la vitesse en fonction de la position :

(2) $\Rightarrow t^2 - \frac{2v_L}{g}t + \frac{2x}{g} = 0$

$t_{1/2} = \frac{v_L}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_L}{g}\right)^2 - \frac{2x}{g}}$

injecté dans (1) :

$v(x) = \cancel{v_L} - \cancel{v_L} \mp g\sqrt{\frac{v_L^2}{g^2} - \frac{2xg}{g^2}}$

$= \mp \sqrt{v_L^2 - 2xg}$

c) $E_c(x)$

$E_c(x) = \frac{m}{2} v(x)^2 = \frac{m}{2}(v_L^2 - 2xg)$ généralement.

donc variation de E_c :

$$\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = \frac{m}{2}\left(v_L^2 - 2x_f g\right) - \frac{m}{2}\left(v_L^2 - 0\right)$$

$$= -\frac{m}{2} 2 x_f g = -\frac{15}{32} m v_L^2$$ avec x_f injecté.

$$\Delta E_p = m g x_f = \frac{15}{32} m v_L^2$$

✓

opposé. Confirmé.

confirme le T. éne. cinétique