b) $x \in \mathbb{R}$,

$$(1+x^2)\, \varphi''(x) + x\, \varphi'(x) - \varphi(x) = 0$$

A) proposition pour $\varphi_1(x) = x^a \qquad a \in \mathbb{R}$

$$\varphi_1'(x) = a x^{a-1}$$

$$\varphi_1''(x) = a(a-1)\, x^{a-2}$$

injecté dans l'éq. diff :

$$(1+x^2)\, a(a-1)\, x^{a-2} + a x \cdot x^{a-1} - x^a = 0$$

$$a(a-1)\, x^{a-2} + a(a-1)\, x^a + a x^a - x^a = 0$$

$$a^2 x^{a-2} - a x^{a-2} + a^2 x^a \cancel{- a x^a} \cancel{+ a x^a} - x^a = 0$$

$$a^2 x^{a-2} - a x^{a-2} + a^2 x^2 x^{a-2} - x^2 x^{a-2} = 0$$

$$(a^2 - a + a^2 x^2 - x^2)\, x^{a-2} = 0$$

$$\left[x^2(a^2-1) + a(a-1)\right] x^{a-2} = 0$$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$a = \pm 1 \qquad a = 0$ ou $a = 1$ comme possibilités.

on choisit $a \equiv 1$. (généralement solution.)

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_1(x) = x}$$

B) $$\varphi''(x) = \underbrace{-\frac{x}{1+x^2}}_{\alpha(x)} \varphi'(x) + \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\beta(x)} \varphi(x)$$

$$W'(x) = \alpha(x)\, W(x)$$

$$\Rightarrow W(x) = W(x_0)\, \exp\left(\int_{x_0}^{x} - \frac{y}{1+y^2}\, dy \right)$$

remplacement variables :

$$z := 1 + y^2 \Rightarrow \frac{dz}{dy} = 2y \Leftrightarrow dy = \frac{dz}{2y}$$

alors
$$-\int_{x_0}^{x} \frac{y}{1+y^2}\, dy = -\int_{z(x_0)=1+x_0^2}^{z(x)=1+x^2} \frac{\cancel{y}}{2\cancel{y}} \frac{1}{z}\, dz$$

$$= -\frac{1}{2} \ln z \Big|_{1+x_0^2}^{1+x^2} = -\frac{1}{2}\left(\ln(1+x^2) - \ln(1+x_0^2)\right)$$

$$\Rightarrow W(x) = W(x_0) \exp\left(-\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln(1+x_0^2)\right)$$

$$= \underbrace{W(x_0)\, e^{\frac{1}{2}\ln(1+x_0^2)}}_{\equiv C_1(x_0)} \cdot e^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$$

$$= C_1 \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}} = C_1 \frac{1}{\sqrt{e^{\ln(1+x^2)}}} = C_1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

c) Résoudre pour $\psi_2(x)$

Déf : $$\frac{W(x)}{\psi_1(x)} = \psi_2'(x) - \frac{\psi_1'(x)}{\psi_1(x)} \psi_2(x)$$ déf. du Wronskien (éq. de travail)

$$C_1 \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} = \psi_2'(x) - \frac{1}{x} \psi_2(x)$$ éq. diff. inhomogène pour $\psi_2(x)$

solution homogène, comme avant : *voir 6.3. a) c) 1)

$$\psi_{2,hom}(x) = x$$

alors $$\psi_2(x) = C(x)\, \psi_{2h}(x)$$

$$f(x) = \psi_2'(x) - \frac{1}{x}\,\psi_2(x)$$

$$C_1 \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} = C'(x)\,x + \cancel{C(x)} - \cancel{\frac{1}{x}\,x\,C(x)}$$

$$C'(x) = \frac{C_1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

intégration $\Rightarrow$

$$C(x) = C(0) + C_1 \int_{x_0 \neq 0}^{x} \frac{1}{y^2\sqrt{1+y^2}}\,dy$$

si $x_0 = 0 \Rightarrow C'(x_0) = \frac{C_1}{x_0^2\sqrt{1}} = \frac{C_1}{0} =$ n.déf.

on calcule :

$$\frac{d}{dx}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = -\frac{1}{x^2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{\cancel{2x}}\cdot\frac{\cancel{2x}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\left(-(1+x^2) + x^2\right)$$

$$= \frac{-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow \int -\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

alors

$$C(x) = C(0) - C_1 \left.\frac{\sqrt{1+y^2}}{y}\right|_{x_0}^{x}$$

$$= \underbrace{C(0) + C_1\frac{\sqrt{1+x_0^2}}{x_0}}_{\equiv C_2} - C_1\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi_2(x) = -C_1\sqrt{1+x^2} + C_2\,x}$$

$(= C(x)\cdot x)$

équivalent à la solution globale car $\psi_1(x)$ contenu dans $\psi_2(x)$.