MÉCANIQUE QUANTIQUE AVANCÉE
TRAVAUX DIRIGÉS No. 4

Potentiel central – partie angulaire

1. **Moment cinétique orbital en coordonnées sphériques**
   On montre dans un premier temps comment les opérateurs du moment cinétique s'expriment en coordonnées sphériques.
   (a) Exprimer $\hat{L}_1$ en représentation de position en coordonnées cartésiennes. Transformer ensuite en coordonnées sphériques utilisant la transformation élémentaire des variables et la règle de la chaine pour les opérateurs différentiels.
   (b) De même pour $\hat{L}_2$ et $\hat{L}_3$.
   (c) En déduire $\hat{L}_+$ et $\hat{L}_-$ en coordonnées sphériques.

2. **Équations différentielles sur la surface d'une sphère**
   On veut ici résoudre l'équation
   $$\hat{L}_+ \left|L, m_{L_{max}}\right\rangle = \hat{L}_+ \left|L, L\right\rangle = 0$$
   utilisant une séparation des variables.
   (a) Écrivez l'équation ci-dessus comme une équation différentielle pour l'*Ansatz* $\left|L, L\right\rangle \equiv \psi_{L,L}\left(\vartheta, \varphi\right)$.
   (b) Utiliser une séparation des variables selon $\psi_{L,L}\left(\vartheta, \varphi\right) := \Theta\left(\vartheta\right) \cdot \Phi\left(\varphi\right)$ pour obtenir une équation différentielle pour $\Theta\left(\vartheta\right)$ et une autre pour $\Phi\left(\varphi\right)$, les deux en fonction d'une constante c.
   (c) Résoudre l'équation pour $\Theta\left(\vartheta\right)$ en introduisant une constante C_ϑ.
   (d) Résoudre l'équation pour $\Phi\left(\varphi\right)$ en introduisant une constante C_φ.
   (e) Écrire la solution de l'équation différentielle totale en fonction de $N = C_\vartheta C_\varphi$ et c.
   (f) Déterminer c en calculant $\hat{L}_3\, \psi_{L,L}\left(\vartheta, \varphi\right)$ de deux manières différentes.

3. **Harmoniques sphériques**
   On admet que le facteur de normalisation s'écrit comme $N_L = \frac{(-1)^L}{2^L L!}\sqrt{\frac{(2L+1)!}{4\pi}}$ et on change la notation: $\psi \equiv Y$.
   (a) Vérifier pour le cas $L = 1$ la normalisation de $Y_{L,L}\left(\vartheta, \varphi\right)$.
   (b) Déduire $Y_{1,0}\left(\vartheta, \varphi\right)$ et $Y_{1,-1}\left(\vartheta, \varphi\right)$ à partir de $Y_{1,1}\left(\vartheta, \varphi\right)$. *Indication: Calculer* $\hat{L}_-\, Y_{1,M_L}\left(\vartheta, \varphi\right)$ *de deux manières différentes.*
   (c) Utiliser un plot polaire pour représenter la partie réelle de $Y_{1,0}\left(\vartheta, \varphi\right)$.
   (d) Montrer explicitement que $Y_{1,1}\left(\vartheta, \varphi\right)$ est fonction propre du legendrien et déterminer la valeur propre associée.
   (e) En déduire les valeurs propres du legendrien pour $Y_{L,M_L}\left(\vartheta, \varphi\right)$. Discuter le cas $L = 0$.