MÉCANIQUE QUANTIQUE AVANCÉE
TRAVAUX DIRIGÉS No. 3

Oscillateur harmonique 2
Moment cinétique général 1

1. **Oscillateur harmonique unidimensionnel dans un champ électrique constant et uniforme**
   On considère une particule de masse au repos m et de charge $q = -e$ dans deux potentiels: Le premier celui de l'oscillateur harmonique, le deuxième dû à un champ électrique constant et uniforme $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon \mathbf{e}_x$.
   (a) Déduire l'opérateur de l'énergie potentielle pour le potentiel électrique.
   (b) Écrire l'équation de Schrödinger pour les états stationnaires.
   (c) Réécrire l'opérateur de l'énergie potentielle total $\hat{V}(x)$ utilisant une factorisation quadratique et un changement de variable pour la position.
   (d) Utiliser la solution de l'oscillateur libre pour trouver les valeurs propres de l'énergie incluant le champ externe.

2. **Moment cinétique et incertitude; modèle vecteur du moment cinétique**
   (a) Exprimer les opérateurs cartésiennes $\hat{J}_1$ et $\hat{J}_2$ utilisant la définition des opérateurs de descente $\hat{J}_-$ et montée $\hat{J}_+$.
   (b) Calculer une expression simple pour $\hat{J}_1^2$ en fonction de $\hat{\mathbf{J}}^2$, $\hat{J}_3$, $\hat{J}_+$ et $\hat{J}_-$. On utilise la relation
   $$\left[\hat{J}_k, \hat{J}_\ell\right] = \imath\hbar \sum_{m=1}^{3} \varepsilon_{k\ell m}\, \hat{J}_m$$
   (c) De même pour $\hat{J}_2^2$.
   (d) Soit l'état $|\psi\rangle = |J, M_J\rangle$ avec des bons nombres quantiques J, M_J. Utiliser les résultats précédants pour calculer les variances $\left(\Delta\hat{J}_1\right)_\psi^2$ et $\left(\Delta\hat{J}_2\right)_\psi^2$.
   (e) En déduire l'expression de $\left(\Delta\hat{J}_1\right)_\psi \left(\Delta\hat{J}_2\right)_\psi$.
   (f) Montrer finalement que ce résultat est en accord avec le théorème général de l'incertitude pour le moment cinétique.
   (g) Utiliser ce constat pour motiver un modèle vectoriel sémiclassique du moment cinétique en mécanique quantique. Donner les orientations permises pour l'opérateur vectoriel $\hat{\mathbf{J}}$ si $J = 1$ et si $J = \frac{1}{2}$.

3. **Moment cinétique orbitale comme générateur de la rotation**
   Soit un point de l'espace réel exprimé par ces coordonnées cartésiennes, alors $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(a) Écrire une transformation *active* en forme matricielle qui représente une rotation du point autour l'axe z par un angle infinitésimal $\delta\theta$.

(b) Utiliser un développement de Taylor pour représenter les éléments de cette matrice. Faire une approximation raisonnable.

(c) Calculer ensuite les coordonnées de la transformée de M.

(d) On regarde dans la suite l'opérateur exponentiel $\hat{R}_z(\delta\theta) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{L}_z\,\delta\theta}$ avec $\hat{L}_z$ la composante z de opérateur du moment cinétique orbital. Développer cet opérateur selon Taylor utilisant la même approximation.

(e) Calculer ensuite en représentation de position la transformée $\hat{R}_z(\delta\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et comparer avec le résultat de la question 3c.

(f) Proposer une généralisation $\hat{R}(\delta\theta)$ pour la rotation autour d'un axe quelconque.