# MÉCANIQUE QUANTIQUE AVANCÉE
# TRAVAUX DIRIGÉS No. 2

## Oscillateur harmonique 1

1. **Représentation matricielle de position et impulsion, variances, et théorème général d'incertitude**

   (a) Écrire les opérateurs de position et impulsion en fonction des opérateurs de déscente et montée, $\hat{A}, \hat{A}^\dagger$.

   (b) Utiliser ces formes de $\hat{X}$ et $\hat{P}$ pour calculer de façon générale un élément de matrice $X_{mn} = \langle m| \hat{X} |n\rangle$ et $P_{mn} = \langle m| \hat{X} |n\rangle$ avec $|n\rangle$ vecteur propre de $\hat{H}$.

   (c) En déduire les représentations matricielles $\mathbf{X}$ et $\mathbf{P}$ pour $n, m \in \{0, \ldots, 3\}$.

   (d) Commenter les éléments sur la diagonale.

   (e) Calculer $(\Delta X)_n^2$ et $(\Delta P)_n^2$ et en déduire les variances de position et impulsion dans l'état $|n\rangle$.

   (f) Vérifier le théorème général d'incertitude pour tous les états $|n\rangle$.

2. **Oscillateur harmonique dans la représentation de Heisenberg – Théorème de Ehrenfest**

   (a) Utiliser l'équation de mouvement de Heisenberg pour déduire une équation différentielle pour l'opérateur $\hat{A}_H(t)$ et la résoudre.

   (b) En déduire $\hat{A}_H^\dagger(t)$.

   (c) Montrer que le commutateur $\left[\hat{A}_H(t), \hat{A}_H^\dagger(t)\right]$ est indépendant du temps.

   (d) Utiliser ces résultats pour construire les opérateurs de position $\hat{X}_H(t)$ et impulsion $\hat{P}_H(t)$ en fonction de $\hat{A}_H(t), \hat{A}_H^\dagger(t)$.

   (e) Vérifier la première équation de Ehrenfest pour l'oscillateur harmonique dans la représentation de Heisenberg.

3. **Invariance de l'hamiltonien sous transformations $U(1)$ – théorie des groupes**

   (a) Montrer que $\hat{H}$ de l'oscillateur harmonique est invariant sous une transformation

   $$\begin{aligned} \hat{A} \to \hat{A}' &= e^{\imath\alpha} \hat{A} \\ \hat{A}^\dagger \to \hat{A}'^\dagger &= e^{-\imath\alpha} \hat{A}^\dagger \end{aligned} \tag{1}$$

   avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) Dans la suite on cherche à construire une transformation unitaire

   $$\hat{A}' = \hat{U}^\dagger(\alpha)\, \hat{A}\, \hat{U}(\alpha)$$

   compatible avec l'Eq. (1). On montre d'abord que cette transformation peut s'écrire avec $\hat{U}(\alpha) = e^{\imath\alpha\hat{Y}}$ si $\hat{Y}$ est hermitien.

(c) On montre que la transformation infinitésimale avec $\hat{U}(\delta\alpha) = e^{\imath\delta\alpha\hat{Y}}$ a comme résultat

$$\hat{A}' = \hat{A} + \imath\delta\alpha \left[\hat{A}, \hat{Y}\right]$$

.

(d) Utiliser l'Eq. (1) pour écrire $\hat{A}$ sous forme d'un commutateur avec $\hat{Y}$.

(e) Montrer que le choix $\hat{Y} = \hat{N}$ est en accord avec la relation précédente.

(f) Vérifier finalement l'invariance de $\hat{H}$ sous transformation avec $\hat{U}(\alpha) = e^{\imath\alpha\hat{Y}}$. $\hat{U}$ est alors une *transformation de symétrie* de l'oscillateur harmonique*.

(g) Vérifier les axiomes d'un groupe (combinaison existe, stabilité, associativité, élément neutre, éléments inverses) pour la transformation $\hat{U}$.
Ce groupe s'appelle $U(1)$, groupe continue unitaire d'un paramètre ($\alpha$). Montrer finalement si $U(1)$ est groupe abélien ou non.

*La transformation par $\alpha$ est considéré comme une transformation **finie**. Cette transformation peut être discrétisé par $\alpha_N = N\Delta\alpha$. Dans la limite, on trouvera la transformation finie composée selon $\alpha = \lim_{N\to\infty} \alpha_N = \lim_{N\to\infty} N\delta\alpha$.