MÉCANIQUE QUANTIQUE AVANCÉÉ
TRAVAUX DIRIGÉS No. 1

1. **Corollaires algébriques pour les relations de commutation**

   (a) Utiliser la relation de commutation pour impulsion et position $\left[\hat{P},\hat{X}\right]=\frac{\hbar}{\imath}\hat{1}$ pour déduire une expression simple pour $\left[\hat{P},\hat{X}^n\right]$, $n\in\{2,3\}$.

   (b) En déduire une expression pour $\left[\hat{P},\hat{X}^n\right]$, $n\in\mathbb{N}^+$.

   (c) On suppose qu'un opérateur fonction de l'opérateur de position peut être développé comme $\hat{F}(\hat{X})=\sum_{k=0}^{n}C_k\hat{X}^k$. Montrer que $\left[\hat{P},\hat{F}(\hat{X})\right]=\frac{\hbar}{\imath}\sum_{k=0}^{n}k\,C_k\,\hat{X}^{k-1}$.

   (d) En déduire que $\left[\hat{P},\hat{F}(\hat{X})\right]=\frac{\hbar}{\imath}\frac{d}{d\hat{X}}\hat{F}(\hat{X})$ et $\left[\hat{X},\hat{G}(\hat{P})\right]=-\frac{\hbar}{\imath}\frac{d}{d\hat{P}}\hat{G}(\hat{P})$ et

   (e) En déduire finalement une expression simple pour les deux commutateurs si $\hat{F}=\hat{F}(\hat{P},\hat{X})$.

2. **Représentation de Heisenberg et théorème de Ehrenfest**

   (a) Dans cette section on utilisera les résultats de la section 1 pour déduire le théorème de Ehrenfest en représentation de Heisenberg. Soit l'hamiltonien d'une particule

   $$\hat{H}_H(t)=\frac{1}{2m}\hat{\mathbf{P}}_H(t)^2+V(\hat{\mathbf{X}}_H(t)).$$

   Montrer que l'hamiltonien ne dépend pas du temps, donc $\hat{H}_H(t)=\hat{H}$.

   (b) Utiliser la relation de commutation canonique entre impulsion et position pour trouver l'expression de $\left[\hat{\mathbf{P}}_H(t),\hat{\mathbf{X}}_H(t)\right]\quad\forall t$.

   (c) Utiliser l'équation de mouvement de Heisenberg pour impulsion et position et le résultat final de la question 1 pour exprimer $\frac{\partial\hat{H}}{\partial\hat{\mathbf{P}}_H}$ et $\frac{\partial\hat{H}}{\partial\hat{\mathbf{X}}_H}$.

   (d) En déduire le théorème de Ehrenfest en représentation de Heisenberg.

3. **Représentation de Heisenberg et équation de mouvement de Newton**

   (a) Utiliser l'hamiltonien de la section 2a et l'équation de mouvement de Heisenberg pour trouver une expression de $\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{X}}_H(t)$.

   (b) Idem pour trouver une expression de $\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{P}}_H(t)$ utilisant le résultat de la question 2c.

   (c) En prenant la valeur moyenne dans l'état ψ_H en déduire une expression équivalente à l'équation de mouvement de Newton.

4. **Mouvement unidimensionnel d'une particule libre – représentation de position**

   (a) Écrire l'opérateur hamiltonien pour une particule libre en mouvement unidimensionnel en représentation de Heisenberg.

(b) En déduire que l'opérateur de l'impulsion $\hat{P}_H(t)$ ne depend pas du temps, donc $\hat{P}_H(t) = \hat{P}_H$.

(c) Formuler une équation différentielle pour l'opérateur de la position $\hat{X}_H(t)$ en fonction de $\hat{P}_H$ et donner la solution de cette équation.

(d) Calculer les deux commutateurs $\left[\hat{P}_H, \hat{X}_H(t)\right]$ et $\left[\hat{X}_H(t), \hat{X}_H(0)\right]$.

(e) On cherche dans la suite des fonctions propres de la position. Comme $\hat{X}_H(t)$ est généralement fonction du temps ses vecteurs propres $|x, t\rangle$ le sont aussi (x valeur propre, t paramètre). Écrire l'équation aux valeurs propres pour $\hat{X}_H(t)$.

(f) On choisit dans la suite la représentation $|x'\rangle := |x, t = 0\rangle$, donc à l'instant $t = 0$, alors $\hat{X}_H(0)\,|x'\rangle = x'\,|x'\rangle$. La fonction d'onde de la particule s'écrit dans cette représentation de position comme $\psi_{x,t}(x') = \langle x'|x, t\rangle$. En déduire une équation différentielle pour $\psi_{x,t}(x')$ et la résoudre.