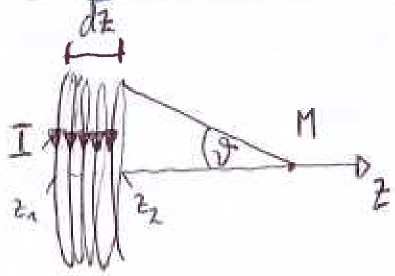
C Solénoïde



1) Expression de $\vec{B}$ en fonction de ϑ pour une spire :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2a} \sin^3\vartheta \, \vec{e_z}$$

Dans un élément du solénoïde il y a dI de courant :

$$dI = dN \cdot I = n \, dz \, I$$

dN : nombre de spires ; n : densité de spires (spires par el. longueur)

$$\Rightarrow d\vec{B}_{sol}(M) = \frac{\mu_0 \, dI}{2a} \sin^3\vartheta \, \vec{e_z} = \frac{\mu_0 n I}{2a} \sin^3\vartheta \, dz \, \vec{e_z}$$

2 différents calculs, même résultat

→ voir page suivante

$$\boxed{\vec{B}_{sol}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} \left[-\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2\right] \vec{e_z}}$$

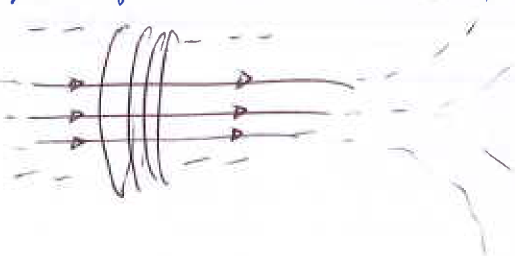
2) Solénoïde infini

a) $\lim\limits_{\substack{\vartheta_1 \to \pi \\ \vartheta_2 \to 0}} \vec{B}_{sol}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} \left[1 - (-1)\right] \vec{e_z}$

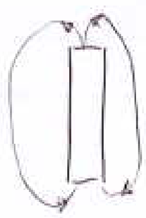
$\cos\vartheta_2 \to \cos 0$; $\cos\vartheta_1 \to \cos\pi$

$$\boxed{\vec{B}_{inf\,sol} = \mu_0 \, n \, I \, \vec{e_z}}$$

b) lignes de champ :



c) Assimilée à un aimant



lignes de champ $\vec{B}$ même comme pour aimant.

$$\boxed{d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2a} \sin^3\vartheta \, dz \, \vec{e}_z}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin\vartheta = \frac{a}{\|\vec{PM}\|} \\ &\cos\vartheta = \frac{z}{\|\vec{PM}\|} \\ \Rightarrow\ &\frac{z}{a} = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \\ \Leftrightarrow\ &z = a\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \end{aligned}}$$

c'est général

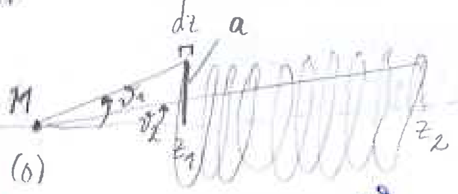
$$\boxed{\tan\vartheta = \frac{a}{z}} \Leftrightarrow z = \frac{a}{\tan\vartheta} = \frac{a\cos\vartheta}{\sin\vartheta}$$

$$\frac{dz}{d\vartheta} = a\left[-\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta} + \cos^2\vartheta\,(-1)\sin^{-2}\vartheta\right]$$

$$= -a\left[\frac{\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta}\right] = -\frac{a}{\sin^2\vartheta}$$

$$\Leftrightarrow dz = -\frac{a\,d\vartheta}{\sin^2\vartheta}$$

$$\Rightarrow d\vec{B}(M) = \frac{-\mu_0 n I}{2} \sin\vartheta \, d\vartheta \, \vec{e}_z$$



$$\vec{B}_{sol.}(M) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} -\frac{\mu_0 n I}{2} \sin\vartheta \, d\vartheta \, \vec{e}_z$$

$$= \frac{\mu_0 n I}{2} \cos\vartheta \Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \vec{e}_z$$

$$= \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos\vartheta_2 - \cos\vartheta_1)\, \vec{e}_z$$

<u>Q8</u>

solénoïde infini :

$$\vartheta_2 \to 0 \quad , \quad \vartheta_1 \to \pi$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{inf.sol.}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2}(1-(-1))\,\vec{e}_z = \mu_0 n I \,\vec{e}_z$$

→ autre feuille.

$$\sin^3 \vartheta = \frac{a^3}{\left(\sqrt{a^2+z^2}\right)^3} \qquad d\vec{B}(M) = dI \, \frac{\mu_0}{2a} \, \frac{a^3}{\left(\sqrt{a^2+z^2}\right)^3} \, \vec{e_z}$$

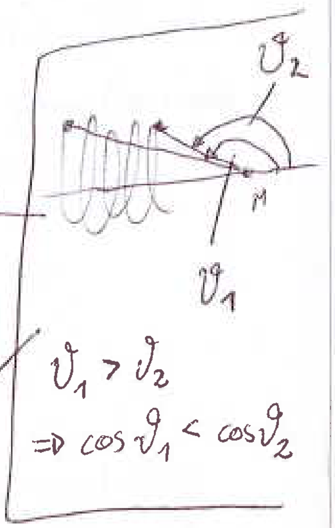
$$\vec{B}_{sol.}(M) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\mu_0 n I}{2a} \, \frac{a^3}{(a^2+z^2)^{3/2}} \, dz \, \vec{e_z}$$

$$= \frac{\mu_0 n I \cancel{a^2}}{2} \left[\frac{z}{\cancel{a^2}(a^2+z^2)^{1/2}} \right]_{z_1}^{z_2} \vec{e_z}$$

$$= \frac{\mu_0 n I}{2} \left[\frac{z_2}{\sqrt{a^2+z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{a^2+z_1^2}} \right] \vec{e_z}$$

$$\cos \vartheta_1 = \frac{z_1}{\sqrt{a^2+z_1^2}} \qquad \left(\frac{4}{\sqrt{1+16}} \approx 0{,}97 \right)$$

$$\cos \vartheta_2 = \frac{z_2}{\sqrt{a^2+z_2^2}} \qquad \left(\frac{3}{\sqrt{1+9}} \approx 0{,}95 \right)$$



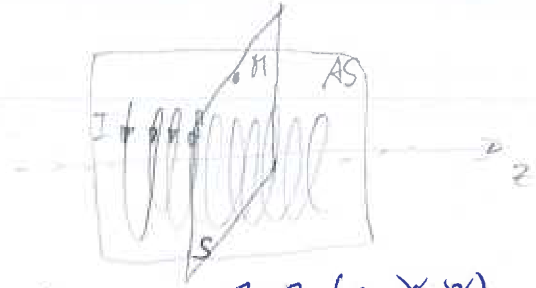
$$\vec{B}_{sol.}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} \left[-\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 \right] \vec{e_z}$$

$\vartheta_2 < \vartheta_1 \Rightarrow \cos \vartheta_2 > \cos \vartheta_1$ pour $0 \leq \vartheta \leq \pi$

alors $\vec{B} \parallel +\vec{e_z}$ ✓

Q8 (2)

cas infini :



Invariances : $\vec{j} = \vec{j}\,(\rho, \cancel{\varphi}, \cancel{z})$ $\Rightarrow$ $\vec{B} = \vec{B}(\rho)$

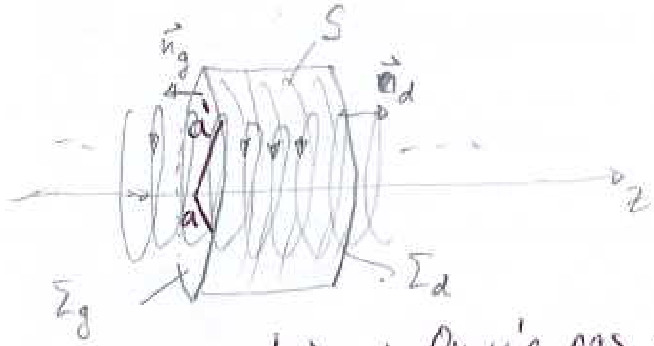
généralement dans tout l'espace !

commentaire : sur l'axe B ne peut pas être fonction de ρ. À l'intérieur B peut être fonction de ρ (à explorer avec T.d.A.). Dans tout l'espace on verra que B sera fonction de ρ.

Symétries : $\vec{B} \parallel AS(\vec{e}_\rho, \vec{e}_z)$; $\vec{B} \perp S(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$

en accord avec résultat du calcul.

Q9



par inv. on sait que $B \neq B(z)$ (!)

commentaire : On n'a pas besoin de connaître $\vec{B}_{ext}$, car on sait par sym. que $\vec{B}_{ext} \parallel \pm\vec{e}_z$, comme $\vec{B}_{int}$.

$$\oiint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS = \overset{\text{surface avec courbure}}{0} + \left.\begin{array}{l}\displaystyle\iint_{\Sigma_{gauche}} \vec{B}_{int}\cdot(-\vec{e}_z)\,dS \\ \displaystyle + \iint_{\Sigma_{droite}} \vec{B}_{int}\cdot(\vec{e}_z)\,dS\end{array}\right\} = 0$$

somme forcement nul car $B_{gauche} = B_{droite}$ pour tout point (ρ, φ)

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle + \iint_{\Sigma_{gauche}} \vec{B}_{ext}\cdot(-\vec{e}_z)\,dS \\ \displaystyle + \iint_{\Sigma_{droite}} \vec{B}_{ext}\cdot(\vec{e}_z)\,dS\end{array}\right\} = 0$$

pareil.

$= 0$

Flux de $\vec{B}$ à travers surface fermée est nul ; $\vec{B}$ est champ dite "solénoïdal".

10 Application numérique

$I = 2\,[A]$

$(a = 0.01\,[m])$ — pas important pour sol. infini ! (pour cas fini $\vartheta = \vartheta(a)$).

$n = 10\,[m^{-1}]$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\left[\frac{kg\, m}{s^2 A^2}\right]$

$$\Rightarrow \|\vec{B}\| = \mu_0 I n$$

$$= 4\pi \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10^{-7}\,\left[\frac{kg\,\cancel{m}\,\cancel{A}}{s^2 A^{\cancel{2}}\,\cancel{m}}\right] \qquad C = As$$

$$= 2.5 \cdot 10^{-5}\,\left[\frac{kg}{Cs}\right]$$

$$\qquad /\!/ \; [T] \quad \text{Tesla}$$

($\simeq$ à peu prêt champ terrestre surfacique) ?

énergie magnétique par unité de longueur :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2\mu_0}\iiint_{\vartheta} \vec{B}^2\, d\vartheta \qquad \dim[\mathcal{E}_m] = \frac{kg^{\cancel{2}}\,\cancel{s^2}\,\cancel{A^2}\,m^{\cancel{2}2}}{s^{\cancel{4}2}\,\cancel{A^2}\,\cancel{kg}\,\cancel{m}} \checkmark$$

ici par longueur

$$d\mathcal{E}_m = \frac{1}{2\mu_0}\,\underbrace{\pi a^2}_{\text{surface coupe}}\|\vec{B}\|^2\, dl$$

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dl} = \frac{\pi a^2}{2\mu_0}\|\vec{B}\|^2 \approx \frac{6.25\,\cancel{\pi}}{8\,\cancel{\pi}} \cdot 10^7 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{-4}\,\left[\frac{J}{m}\right]$$

$$= 0.78 \cdot 10^{-7}\,[J/m] \qquad \Rightarrow (l = 20\text{ cm}) \quad \mathcal{E}_m \simeq 0.16 \cdot 10^{-7}\,[J]$$

inductance linéique

$$L = \frac{2\mathcal{E}_m}{I^2} \qquad \left(\Rightarrow \frac{dL}{dl} = \frac{2.5 \cdot 10^{-8}}{4}\left[\frac{kg\, m}{s^2 A^2}\right] \approx 10^{-8}\left[\frac{H}{m}\right]\right)$$

$$\searrow L = \frac{0.32 \cdot 10^{-7}}{4}\,[H] \approx 10^{-8}\,[H] \qquad (S.I.)$$