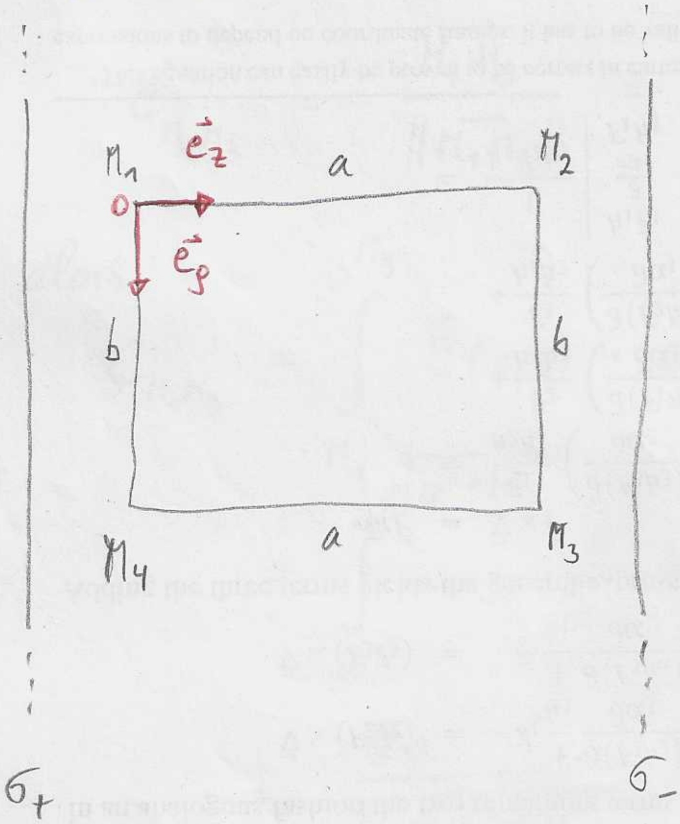
THÈME 3 (2019 - 2020)

2 (Circulation du $\vec{E}$)



Q3 : a) Circulation le long de $M_1 M_2 M_3$:

$$C_{M_1 M_2 M_3} = C_{M_1 M_2} + C_{M_2 M_3}$$

$$= \int_{M_1}^{M_2} \vec{E} \cdot \vec{dl} + \int_{M_2}^{M_3} \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

$$= \int_0^a \vec{E}(\rho = 0, z) \cdot \vec{e_z} \, dz$$

$$+ \int_0^b \vec{E}(\rho, z = a) \cdot \vec{e_\rho} \, d\rho$$

$$= \int_0^a \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \underbrace{\vec{e_z} \cdot \vec{e_z}}_{=1} dz + \int_0^b \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \underbrace{\vec{e_z} \cdot \vec{e_\rho}}_{=0} d\rho$$

$$= \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}$$

pour $C_{M_1M_3}$ (directe) on calcule d'abord $d\vec{l}$ pour le chemin directe :

$$\vec{e}_{M_1M_3} = \frac{\overrightarrow{M_1M_3}}{\|\overrightarrow{M_1M_3}\|} = \frac{a\vec{e}_z + b\vec{e}_\rho}{(a^2+b^2)^{1/2}}$$

alors :

$$C_{M_1M_3} = \int_{M_1}^{M_3} \vec{E}(\rho, z) \cdot d\vec{l}_{M_1M_3}$$

$$= \int_0^{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z \cdot \frac{a\vec{e}_z + b\vec{e}_\rho}{\sqrt{a^2+b^2}} \, dl_{M_1M_3}$$

$$= \frac{\sigma a}{\varepsilon_0\sqrt{a^2+b^2}} \, l \Big|_0^{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}$$

pareil. On a vérifié que la circulation de $\vec{E}$ est indépendent du chemin entre M_i et M_f.

b) Circulation le long de $M_1 M_2 M_3 M_4 M_1$:

$$C_{M_1M_2M_3M_4M_1} = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0} + C_{M_3M_4}$$

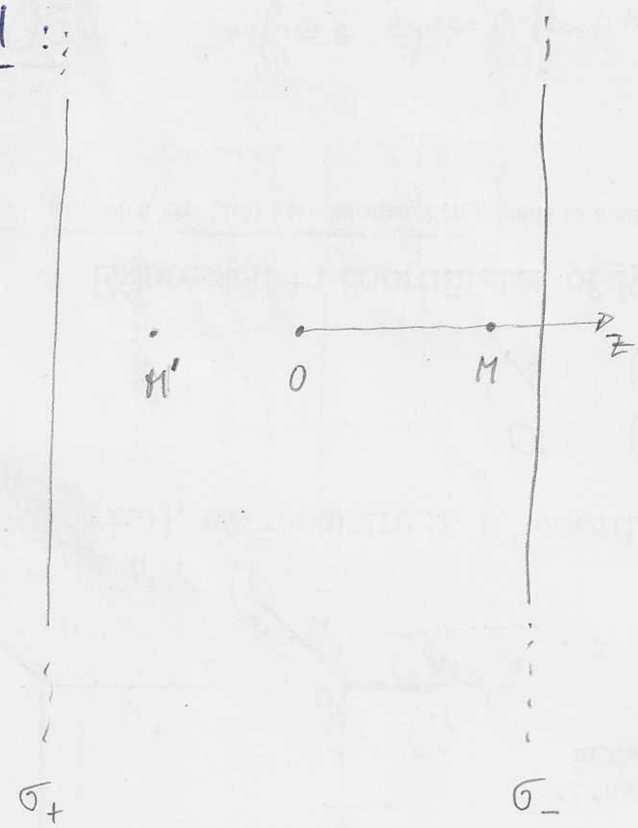
$$= \frac{\sigma a}{\varepsilon_0} + \int_a^0 \vec{E} \cdot \vec{e}_z \, dz$$

$$= \frac{\sigma a}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} z \Big|_a^0$$

$$= \frac{\sigma a}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma a}{\varepsilon_0} = 0$$

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, champ $\vec{E}$ conservatif (verifié).

Q4 :



expression générale :

$$\boxed{V(M_i) - V(M_f) = \int_{M_i}^{M_f} \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

on intègre de M ($\equiv M_i$) à O ($\equiv M_f$) :

$$V(M) - V(0) = \int_z^0 \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\, dz' = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} z$$

teste avec énergie potentielle :

$\mathcal{E}_{pot} = q V(M)$

donc ici, pour $q > 0$, $\mathcal{E}_{pot}(M') > \mathcal{E}_{pot}(M)$

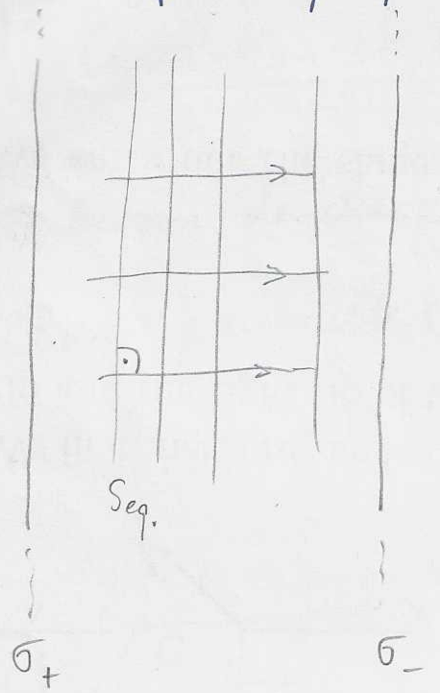
et alors la charge q a ~~moins~~ plus d'én. pot en M', plus ~~proche~~ loin de la plaque négative et plus ~~loin~~ proche de la plaque positive. Raisonnable.

autre teste :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V = -\sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} x_3\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_3 \quad \checkmark$$

Q5 : Surfaces équipotentielles :

Q6 : angle $= \frac{\pi}{2}$



Q7 : $M \in$ plan $S \parallel \sigma_\pm$ c M_3

comme $C_{M_1 M_3} = V(M_1) - V(M_3)$

$= C_{M_1 M}$

et $C_{M_3 M} = 0 \Leftrightarrow V(M_3) = V(M)$