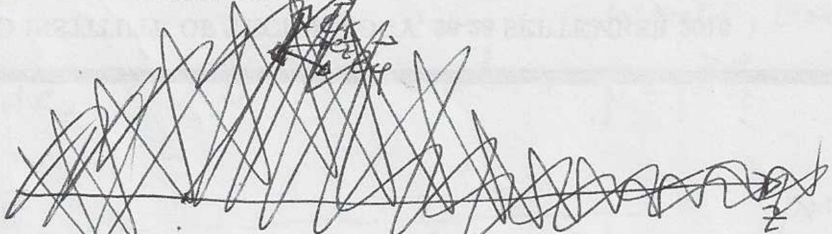
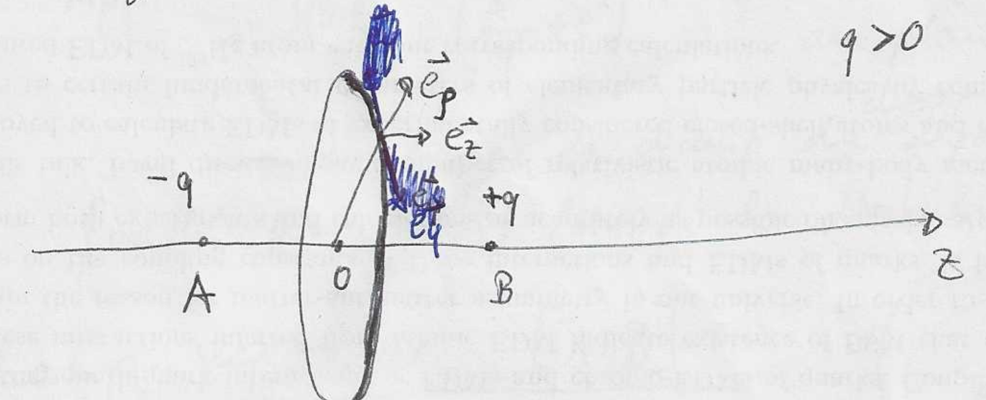
2 Dipôle de deux charges égales

Choix du repère



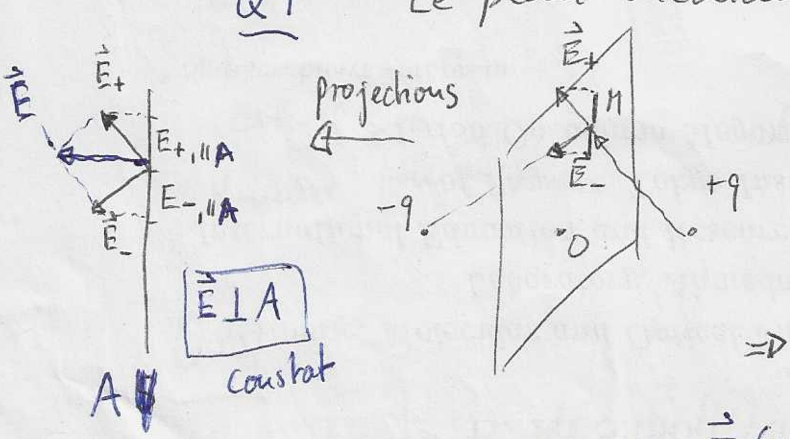


repère : coordonnées cylindriques

Champ dans le plan médian de [A,B]

plan antisymétrie

Q1 Le plan médian est A $(O, \vec e_\rho, \vec e_\varphi)$.



Car $E_{+,\parallel A}(M) = -E_{-,\parallel A}(M)$

$\Rightarrow E_{\parallel A}(M) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\vec E(M) \parallel -\vec e_z}$

Q2 Expression de $\vec E(M)$

$$\vec E_+(M) + \vec E_-(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{d}{2}\vec e_z - \frac{d}{2}\vec e_z\right]\left(\frac{d^2}{4}+\rho^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\vec E(M) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\vec e_z \frac{d}{\left(\frac{d^2}{4}+\rho^2\right)^{3/2}}$$

$\vec{P_+M} = -\frac{d}{2}\vec e_z + \rho\vec e_\rho$

$\vec{P_-M} = \frac{d}{2}e_z + \rho\vec e_\rho$

$\|\vec{P_+M}\| = \|\vec{P_-M}\| = \left(\frac{d^2}{4}+\rho^2\right)^{1/2} \Leftarrow$

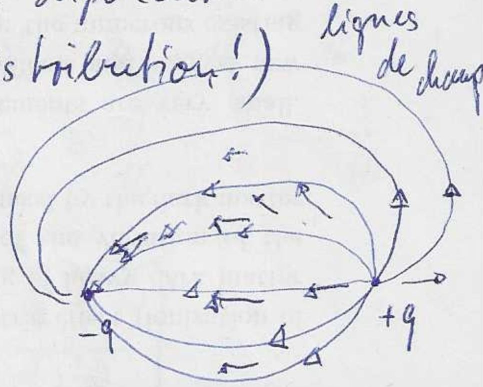
Question 3

$\vec{p} = q\,\vec{AB}$ moment dipolaire pour système él. neutre (à définir plus généralement, voir cours manuscrit)

$d\vec{e}_z = \vec{AB}$ alors $\vec{p} = q d \vec{e}_z$

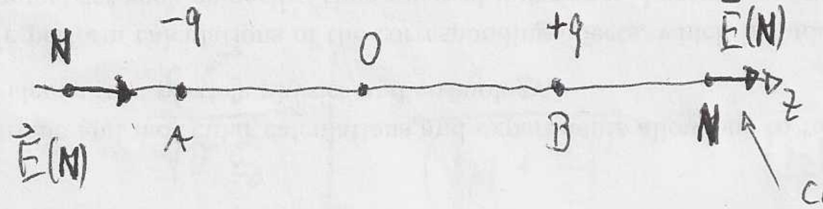
$$\Rightarrow \vec{E}_{dip}(M) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}}{\left(\frac{d^2}{4}+q^2\right)^{3/2}}$$ pour des points M au plan médian.

→ montrer lignes de champ du champ dipolaire (valable pour points loin de la distribution!)



Champ sur l'axe [A,B]

Q4



car $+q$ domine toujours

car $-q$ domine toujours

alors $\vec{E}(N) \parallel \vec{e}_z$

$\vec{E}$ sur axe négative → symétrie

(z positive) $z>0$

Q5

Expression de $\vec{E}(N)$: $(=\vec{BN})$ $(=\vec{AN})$

$$\vec{E}(N) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(z-\frac{d}{2}\right)\vec{e}_z}{\left\|\left(z-\frac{d}{2}\right)\vec{e}_z\right\|^3} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(z+\frac{d}{2}\right)\vec{e}_z}{\left\|\left(z+\frac{d}{2}\right)\vec{e}_z\right\|^3}$$

voir page suivante pour détails cas $z<0$.

$$= \frac{q\vec{e}_z}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left(|z|-\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(|z|+\frac{d}{2}\right)^2}\right]$$ $\boxed{\text{pour } z>0}$.

$z < 0$; $\wedge \; |z| > \frac{d}{2}$

$$\|(z-\tfrac{d}{2})\vec{e}_z\| = |z| + \frac{d}{2}$$

$$\vec{E}(N_2) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overbrace{(z-\frac{d}{2})}^{<0}\vec{e}_z}{\left(|z|+\frac{d}{2}\right)^3} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overbrace{(z+\frac{d}{2})}^{<0}\vec{e}_z}{\left(|z|-\frac{d}{2}\right)^3}$$

$$= \frac{q\,\vec{e}_z}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(z-\frac{d}{2})}{\left(|z|+\frac{d}{2}\right)^3} - \frac{(z+\frac{d}{2})}{\left(|z|-\frac{d}{2}\right)^3}\right]$$

$d=2,\ z=3$: "+" $[\quad] = \frac{1}{(3-1)^2} - \frac{1}{(3+1)^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$!

$d=2,\ z=-3$: "+" $[\quad] = \frac{1}{(-3-1)^2} - \frac{1}{(-3+1)^2} = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{16}$!

$$= \frac{q\,\vec{e}_z}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-\left(|z|+\frac{d}{2}\right)}{\left(|z|+\frac{d}{2}\right)^3} - \frac{-\left(|z|-\frac{d}{2}\right)}{\left(|z|-\frac{d}{2}\right)^3}\right]$$

$$= \frac{q\,\vec{e}_z}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\left(|z|+\frac{d}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(|z|-\frac{d}{2}\right)^2}\right]$$

$\checkmark$

Q6 relation avec moment dipolaire

$$\vec{E}(N) = \frac{q\,\vec{e_z}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\left(z+\frac{d}{2}\right)^2 - \left(z-\frac{d}{2}\right)^2}{\left(z-\frac{d}{2}\right)^2\left(z+\frac{d}{2}\right)^2}\right]$$ (pour $z>0$)

... (voir feuille)

$$= \frac{q\,\vec{e_z}}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{4z\frac{d}{2}}{\left(z^2-\frac{d^2}{4}\right)^2} = \frac{2qd\,\vec{e_z}}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{z}{\left(z^2-\frac{d^2}{4}\right)^2}$$

$\Rightarrow$

$$\vec{E}_{dip}(N) = \frac{2\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{z}{\left(z^2-\frac{d^2}{4}\right)^2}$$

Q7 Approximation à distance moyenne

(à long distance $E(M) = E(N) = 0$)

$\boxed{\rho, z \gg d}$ $\Rightarrow$ ($\frac{d^2}{4}$ négligeable devant z^2 ou ρ^2)

$$\vec{E}_{dip}(M) \simeq -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{p}}{\rho^3}$$

$$\vec{E}_{dip}(N) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2\vec{p}}{z^3}$$

alors, si $\|\vec{OM}\| = \|\vec{ON}\| \Rightarrow \rho = z \Rightarrow$

$$2\,\|\vec{E}_{dip}(M)\| \simeq \|\vec{E}_{dip}(N)\|$$